DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 2, 2019

Аблабеков Б.С., Арипова А.Т.

ИЛЕШКЭЭКТИКТИН ТЕҢДЕМЕСИНДЕГИ УБАКЫТТАН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН БУЛАКТЫН ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Аблабеков Б.С., Арипова А.Т.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОГО ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

B.S. Ablabekov, A.T. Aripova

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE TIME SOURCE IN THE VISCOALITY EQUATION

УДК: 517.95

Макалада үчүнчү тартиптеги илешкэээктиктин теңдемеси үчүн убакыттан көз каранды болгон булактын функциясын аныктоо тескери маселеси каралган. Берилген маселени чыгаруу үчүн алгач аны эквиваленттүү интегро-дифференциалдык параболалык теңдеме үчүн тескери маселесине алып келип, анан алынган маселени изилдейбиз. Гёльдер мейкиндигинде тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденген. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдеш үчүн, каралып жаткан интегро-дифференциалдык параболалык оператордун фундаменталдык чыгарылышын жана кошумча информацияны пайдаланып, каралган тескери маселени Вольтеррдин экинчи түрүндөгү теңдемелер системасына алып келебиз. Алынган системага Вольтеррдин оператордук ыкмасын колдонуп тескери маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгын далилдейбиз. Алынган интегралдык теңдемелер системасынан Гёлдердин мейкиндигинде каралып жаткан тескери маселенин чыгарылышынын туруктуулугу келип чыгат.

Негизги сөздөр: *илешкэээктик теңдемеси, тескери маселе, интегро-дифференциалдык параболалык теңдеме, фундаменталдык чыгарылыш, булак функциясы, Вольтеррдин оператордук ыкмасы*

В статье рассматривается обратная задача для уравнения вязкоупругости третьего порядка. Для решения обратной задачи сначала сведем ее к эквивалентной обратной задаче для интегро-дифференциального параболического уравнения, затем исследуем полученную обратную задачу. В пространстве Гёльдера доказаны теоремы о существованиии и единственностии решения обратной задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной обратной задачи используя фундаментальное решение рассматриваемого интегро-дифференциального параболического оператора и дополнительную информацию, сведем обратную задачу к замнутой системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. К полученной системе применив метод операторных уравнений Вольтерра, докажем теорему о существовании и единственности решения обратной задачи. Из полученной системы интегральных уравнений в пространстве Гёльдера можно получить оценку устойчивости решения обратной задачи

Ключевые слова: *уравнение вязкоупругости, обратная задача, интегро-дифференциальное параболическое уравнение, фундаментальное решение, функция источника, метод операторных уравнений Вольтерра.*

The article considers the inverse problem for the equation of viscoelasticity of the third order. To solve the inverse problem, we first reduce it to an equivalent inverse problem for an integro-differential parabolic equation, then we investigate the resulting inverse problem. Theorem on the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem are proved in Hölder space. To prove the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem using the fundamental solution of the considered integro-differential parabolic operator and additional information, we reduce the inverse problem to a closed-loop system of Volterra type second integral equations of the second kind. Applying the method of Volterra operator equations to the resulting system, we prove theorems on the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem. From the obtained system of integral equations in a Hölder space, it is possible to obtain an estimate of the stability of the solution of the inverse problem

Key words: *viscoelasticity equation, inverse problem, integro-differential parabolic equation, fundamental solution, source function, Volterra operator equations method.*

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Киришүү. Бул макалада үчүнчү тартиптеги илешкээктиктин теңдемеси үчүн убакыттан көз каранды болгон булак функциясын аныктоо тескери маселесинин классикалык чыгарылышынын жашаары жана жалгыз экендиги жөнүндө суроо каралган. Тескери маселелерди изилдөөдө, алгач тиешелүү түз маселелердин чыгарылышынын жашашы, жалгыздыгы жөнүндө маалыматтарды, алардын кандай касиеттерге ээ болоорун билүү зарыл экендиги белгилүү [1, 2] жана алардагы библиографияларда иштеринде үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелер боюнча кененирээк маалматтарды тапсаңар болот. Үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн аралаш маселелердин классикалык жана жалпыланган чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремалар [3,4] макалаларында далилденген.

Маселенин коюлушу жана изилдениши. Мейли $Q_T=\{(x,t):\quad x\in R,\ t\in(0,T]\},\ T>0$- фиксирленген сан.

Төмөнкү шарттардан $(u,f)\in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\times H^{\alpha}([0,T])$ экилдик функцияларын

$$Lu\equiv u_{tt}-u_{xxt}-u_{xx}=f(t)h(x,t)+g(x,t),\qquad (x,t)\in Q_T,\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in R,\tag{2}$$

$$u(x_0,t)=\varphi(t),\quad -\infty<x_0<+\infty\quad 0\le t\le T,\tag{3}$$

аныктоо тескери маселесин карайлы, мында $h,g,u_0(x),u_1(x)$ жана φ- берилген функциялар, $h(0,t)\neq 0$.

Аныктама 1. Экилдик $\{u,f\}$ функцияларын (1)-(3) маселесинин чыгарылышы деп айтабыз, эгерде

1) $u(x,t)$ – Q_T областында (1) -(2) маселесинин классикалык чыгарылышы,

2) $u(x_0,t)=\varphi(t),\quad 0\le t\le T$,

1-Теорема. Мейли $h\in H^{2+\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T),\quad g\in H^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T),\qquad u_0,u_1\in H^{2+\alpha}(R),$ $\varphi\in H^{2+\alpha}([0,T])$, $|h(x_0,t)|\ge h_0>0$ болсун жана $u_0(x_0)=\varphi(0),\quad u_1(x_0)=\varphi'(0)$ макулдашуу шарттары аткарылсын.Анда (1) -(3) тескери маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз.

Далилдөө. (1)-(3) маселесинин сызыктуу экендигин эске алып, биз анын чыгарылышын $(u,f)=(u^1,0)+(u^2,f)$ түрүндө издейбиз, мында $u^1(x,t)$

$$Lu^1=g(x,t),\quad u^1(x,0)=u_0(x),\quad u^1_t(x,0)=u_1(x)\tag{4}$$

маселесинин чыгарылышы.

Ал эми (u^2,f) экилдик функциялары

$$Lu^2=f(t)h(x,t),\quad u^2(x,0)=0,\quad u^2_t(x,0)=0,\quad u^2(x_0,t)=\varphi(t)-u^1(x_0,t)\tag{5}$$

маселесинин чыгарлышы.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Мындан, 1-теореманы далилдеш үчүн төмөнкү шарттардан экилдик $\{u(x,t),\ f(t)\}$ функцияларынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө жетиштүү экендигинин келип чыгаарына ээ болобуз:

$$Lu = fh, \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in R, \tag{7}$$

$$u(x_0,t) = \varphi(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{8}$$

[1] макаласындагы ыкманы пайдаланып, (6) -(8) тескери маселесинен үчүлтүк $(u,V,\ f)$ функцияларын төмөнкү шарттардан аныктоо тескери маселесине өтөбүз:

$$u_t + u = V, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{9}$$

$$V_t - V_{xx} - V + \int_0^t e^{-(t-\tau)} V(x,\tau)d\tau = f(t)h(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{10}$$

$$V(x,0) = 0, \qquad x \in R, \tag{11}$$

$$V(x_0,t) = \varphi'(t) + \varphi(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{12}$$

(6) -(8) жана (9) -(12) маселелерин төмөнкү лемма байланыштырат.

1-Лемма. 1) Эгерде $(u,\ f)$ функциялары (6) -(8) тескери маселесинин чыгарылышы болсо, анда $(u,V,\ f)$ үчүлтүк функциялары (9) -(12) тескери маселесинин чыгарылышы болот.

2) Мейли, тескерисинче үчүлтүк $(u,V,\ f)$ функциялары тескери маселесинин (9) -(12) чыгарылышы болсо, анда экилдик $(u,\ f)$ функциялары (6) -(8) тескери тескери маселесинин чыгарылышы болот жана $V = u_t + u$.

Лемманын далилдөөсү түздөн-түз текшерүүдөн эле келип чыгат. Бизге (10)-(11) Коши маселесинин чыгарылышы төмөнкү формула менен аныкталары белгилүү:

$$V(x,t) = \int_0^t f(\tau)\int_R Z(x,t,y,\tau)h(y,\tau)dy\,d\tau, \tag{13}$$

мынды $Z(x,t,y,\tau)$ функциясы ([1])

$$L_1 u \equiv u_t - u_{xx} - u + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(x,\tau)d\tau$$

операторунун фундаменталдык чыгарылышы.

Эми $V_t = V_{xx} + V - \int_0^t e^{-(t-\tau)} V(x,\tau)d\tau + f(t)h(x,t)$ болгондуктан, бул тендеменин он жагына (13) чыгарылышын коюп

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$V_t = \int_0^t f(\tau)h(y,\tau)\int_R (Z_{xx} + Z - \int_\tau^t e^{-(\tau-\tau_1)} Z)(x,\tau,y,\tau_1)d\tau_1)dyd\tau + f(t)h(x,t) \quad (14)$$

туюнтмасына ээ болобуз.

(14) кө $x = x_0$ ду коюп жана (12) кошумча информациясын пайдаланып

$$f(t) + \int_0^t K(t,\tau) f(\tau)d\tau = g_1(t), \qquad 0 \le t \le T \quad (15)$$

Вольтеррдин экинчи түрүндөгү интегралдык тендемесин алабыз, мында

$$K(t,\tau) = \left[\int_R (Z_{xx} + Z - \int_\tau^t e^{-(\tau-\tau_1)} Z)(x,\tau,y,\tau_1)d\tau_1)h(y,\tau)dy\Big|_{x=x_0} \right] \Big/ h(x_0,t) \text{ ,} \quad (16)$$

$$g_1(t) = \left(\varphi''(t) + \varphi'(t)\right) \cdot h^{-1}(x_0,t). \quad (17)$$

Ал эми $h \in H^{2+\alpha,\alpha/2}$, анда (16) туюнтмасынан $K(t,\tau)$ ядросу

$$|K(t,\tau)| \le C_1,$$

$$|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)| \le C_2 |t_1 - t_2|^{\alpha/2}$$

барабарсыздыктарын канаттандыраарына ээ болобуз.

Мындан (15) интегралдык теңдемесинин чыгарылышы жашаарын, жалгыздыгын жана ал чыгары-лыш

$$f(t) = \left[\varphi''(t) + \varphi'(t)\right]h^{-1}(x_0,t) + \int_0^t R(t,\tau)\left[\varphi''(t) + \varphi'(\tau)\right]h^{-1}(x_0,\tau)d\tau, \quad (18)$$

көрүнүшүндө болоруна ээ болобуз, мында $R(t,\tau)$ функциясы $K(t,\tau)$ ядросунун резольвентасы.

Эми биз (18) формуласы менен аныкталган $f(t)$ функциясы $H^{\alpha/2}([0,T])$ мейкиндигинде жатарын көрсөтөлү. Ал үчүн $f(t) - f(t_0)$ айырмасын карайлы.Анда (15) тен

$$\begin{aligned} h(x_0,t) f(t) - h(x_0,t^0) f(t^0) &= \left[\varphi''(t) - \varphi''(t^0) + \varphi'(t) - \varphi'(t^0)\right] - \\ -\int_0^t K_1(t,\tau) f(\tau)d\tau + \int_0^{t^0} K_1(t^0,\tau) f(\tau)d\tau &= \left(\varphi''(t) - \varphi''(t^0)\right) + \\ +\left(\varphi'(t) - \varphi'(t^0)\right) - \int_0^t \left[K_1(t,\tau) - K_1(t^0,\tau)\right] f(\tau)d\tau & \end{aligned} \quad (19)$$

катнашын алабыз, мында $K_1(t,\tau) = h(x_0,t)K(t,\tau)$.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

(16) -(19) маселесинен жана теоремадагы шарттардан

$$\left| f(t) - f(t^0) \right| \le C_1 \left| t - t^0 \right|^{\alpha/2} + C_2 \left| t - t^0 \right|^{\alpha/2} + C_3 \left| t - t^0 \right|^{\alpha/2} \tag{20}$$

барабарсыздыгын алабыз жана бул барабарсыздыктан $f(t) \in H^{\alpha/2}([0,T])$ келип чыгат.

Эми экилдик $\{V(x,t),\ f(t)\}$ функциялары, мында $f(t)$ функциясы (18) формуласы менен аныкталат, ал эми

$$V(x,t) = \int_0^t f(\tau) \int_R Z(x,t,y,\tau) h(y,\tau) dy d\tau \tag{21}$$

(9)-(12) шарттарын канаттандырарын көрсөтөлү. (21) формуласы менен аныкталган $V(x,t)$ функциясы (10)-(11) маселесинин жалгыз чыгарылышы болот. (12) шарты дагы аткарыларын көрсөтөлү. Мейли $V(x_0,t) = \varphi_1{}'(t) + \varphi_1(t)$ функциясы

$$\varphi''_1(t) + \varphi_1^{'}(t) = \int_0^t K_1(t,\tau) f(\tau) d\tau + f(t) h(x_0,t) \tag{22}$$

барабардыгын канаттандырсын.

Ал эми $f(t)$ функциясы (15) тендемесинин чыгарылышы болгондуктан, анда (15) жана (22) ден $\varphi^{"}(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t)$ айырмасына карата төмөнкүдөй нөлдүк баштапкы шарттарды канаттандырган кадимки дифференциалдык тендемени алабыз:

$$\varphi^{"}(t) + \varphi^{'}(t) = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi^{'}(0) = 0.$$

Демек мындан $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ ты алабыз жана (12) шарты аткарылды.

(9) - (12) маселесинин чыгарылышынын жалгыздыгы (13) жана (15) тендемелердин чыгарылыштарынын жалгыздыгынан келип чыгат.

2-Теорема. Мейли (V_1, f_1) жана (V_2, f_2) экилдиктери (9)-(12) маселесинин каалагандай эки чыгарылышы болсун, ал эми $\varphi_1(t)$ жана $\varphi_2(t)$ (12) функциялары ушул чыгарылыштарга жооп берген кошумча информациялар болушсун. Анда каалагандай чектүү T>0 саны табылып, туруктуулукту баалоо барабарсыздыгы орун алат

$$\begin{aligned} &\left\| V_1 - V_2 \right\|_{H^{\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)} \le C \left\| \varphi_1 - \varphi_2 \right\|_{H^{\alpha/2}([0,T])}, \\ &\left\| f_1 - f_2 \right\|_{H^{\alpha/2}([0,T])} \le C \left\| \varphi_1 - \varphi_2 \right\|_{H^{2+\alpha}([0,T])}. \end{aligned} \tag{23}$$

Далилдөө. (V_1, f_1) жана (V_2, f_2) үчүн жазылган (13) жана (15) тендемелеринен

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$V_1(x,t)-V_2(x,t)=\int_0^t\left[f_1(\tau)-f_2(\tau)\right]\int_R Z(x,t,y,\tau)h(y,\tau)dy\,d\tau,$$

$$f_1(t)-f_2(t)+\int_0^t K(t,\tau)\left[f_1(\tau)-f_2(\tau)\right]d\tau=g_1(t)$$

катнаштарын алабыз. Акыркы катнаштардан, түздөн-түз баалоого өтүп жана

$\left|K(t,\tau)\right|\le C_1,\ \|h\|_{H^{2+\alpha,\alpha/2}}\le C$ барабарсыздыктарын эске алып,

$$\left\|f_1(t)-f_2(t)\right\|_{H^{\alpha/2}}+C_1\int_0^t\left\|f_1(\tau)-f_2(\tau)\right\|_{H^{\alpha/2}}d\tau\le C\left\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right\|_{H^{2+\alpha}([0,T])}$$

$$\left\|V_1(x,t)-V_2(x,t)\right\|_{H^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)}\le C\int_0^t\left\|f_1(\tau)-f_2(\tau)\right\|d\tau$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Биринчи барабарсыздыкка Гронуолл-Беллмандын леммасын колдонуп, (23) барабарсыздыгына ээ болобуз. 2-теорема далилденди.

Адабияттар:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
2. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для уравнений третьего порядка. - LAP.LAMBERT Academic Publishing 2011. - 291 с.
3. Аблабеков Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, №4. - Бишкек, 1999. - С. 12-19.
4. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. О разрешимости решений первой начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска-Лява. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, №2. - Бишкек, 2017. - №2. - С. 3-8.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымалиева А.А.