DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 6, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Байманкулов А.Т., Бабулова Г.А.

НЫМДУУЛУКТУН БИР ТЕКТҮҮ ЧӨЙРӨДӨГҮ КОНВЕКЦИЯСЫНДА ЖЫЛУУЛУК ӨТКӨРҮМДҮҮЛҮК КОЭФФИЦИЕНТТИ АНЫКТОО ҮЧҮН БАЙЛАНЫШТУУ МИЛДЕТ

Байманкулов А.Т., Бабулова Г.А.

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КОНВЕКЦИИ ВЛАГИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

A.T. Baimankulov, G.A. Babulova

THE ADJOINT PROBLEM TO DETERMINE THE COEFFICIENT OF THERMAL CONDUCTIVITY IN CONVECTION OF MOISTURE IN A HOMOGENEOUS ENVIRONMENT

УДК: 519.62:624.131

Макала жердин (топурактын) диффузия коэффициентин математикалык жана компьютердик моделдөөнүн жардамы менен аныктоо көйгөйүнө арналган. Топуракта, анын чек арасындагы шарттардын туруксуздугу менен байланышкан жылуулукту, суу жана газ эритмесин тынымсыз ташуу жүрүп турат. Бул процесс адатта топурактагы вертикалдуу багыттагы термодинамикалык тең салмактуулук шарттарды сактабагандыкты мүнөздөйт. Жылуулук процесстерин жана алмашуу массасын компьютердик моделдөө негизинен кымбат өздүк эксперименттери жок жана чыныгы кубулуштарды максималдуу чагылдырган чечимдерди алууга мүмкүндүк берет. Иште жылуулуктун бир тектүү чөйрөдө таралуу процессинин тескери милдети изилденет. Изилденүүчү милдеттин математикалык модели келтирилет. Жер бетинде топурактын температурасын жана нымдуулугун пайдаланып, топурактын жылуулук өткөрүмдүүлүк коэффициенти аныкталат. Дифференциалдык деңгээлде байланышкан милдет түзүлөт.

Негизги сөздөр: *баштапкы крайлык милдет, байланыштуу милдет, функционал, итерациондык метод, жылуулук өткөрүмдүүлүктүн коэффициенти, диффузия коэффициенти, компьютердик моделдөө.*

Статья посвящена проблеме определения коэффициента диффузии грунта (почвы) с помощью математического и компьютерного моделирования. В почве происходит непрерывный перенос тепла, водного раствора и газа, связанный с непостоянством условий на ее границе. Этот процесс обычно характеризует несоблюдение условий термодинамического равновесия в почве в вертикальном направлении. Компьютерное моделирование процессов тепло и масса обмена позволяет в значительной мере обходится без дорогостоящих натурных экспериментов, и получить решения, максимально отражающие реальные явления. В работе изучается обратная задача процесса распространения тепла в однородной среде. Приводится математическая модель исследуемой задачи. Используя температуру и влагу грунта на поверхности земли определяется коэффициент теплопроводности грунта. Строится сопряженная задача на дифференциальном уровне.

Ключевые слова: *начально-краевая задача, сопряженная задача, функционал, итерационный метод, коэффициент теплопроводности, коэффициент диффузии, компьютерное моделирование.*

The article is devoted to the problem of determining the diffusion coefficient of the soil (soil) using mathematical and computer modeling. In the soil, there is a continuous transfer of heat, aqueous solution and gas, associated with the inconstancy of conditions at its boundary. This process usually characterizes non-observance of the conditions of thermodynamic equilibrium in the soil in the vertical direction. Computer simulation of the processes of heat and mass exchange makes it possible, to a large extent, to dispense with costly full-scale experiments, and to obtain solutions that most reflect real phenomena. This paper studies the inverse problem of

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

the process of heat distribution in a homogeneous medium. A mathematical model of the problem under study is given. Using the temperature and moisture of the soil on the surface of the earth is determined by the coefficient of thermal conductivity of the soil. The adjoint problem is constructed at the differential level.

***Key words**: initial-boundary problem, adjoint problem, functional, iterative method, thermal conductivity coefficient, diffusion coefficient, computer simulation.*

1. Постановка задачи.

В области $Q = (0,H) \times (0,T)$ решается следующая задача

$$\gamma_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

где $\theta(z,t)$ - температура грунта, $\omega(z,t)$ - влажность грунта; λ - теплопроводность грунта, γ_0 - удельная масса, C - теплоемкость,. μ - термоградиентный коэффициент, k - коэффициент влагопроводности грунта.

Задача (1.1) и (1.2) решается итерационным методом при следующих начально-граничных условиях

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=H} = -\alpha\left(\theta|_{z=H} - T_b(t)\right), \tag{1.3}$$

$$\theta|_{z=0} = T_1, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(z), \tag{1.4}$$

$$\theta|_{z=0} = \omega_1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z}\bigg|_{z=H} = A(t), \tag{1.5}$$

$$\omega|_{t=0} = \omega_0(z). \tag{1.6}$$

Дополнительно, в начальный момент времени $t = 0$, задаются влажность и температура почвы на земной поверхности

$$\theta|_{z=H} = T_q(t), \quad \omega|_{t=0} = \omega_q(t). \tag{1.7}$$

Необходимо определить коэффициент теплопроводности почвы λ.

2. Сопряженная задача.

Полагаем, что система (1.1) – (1.6) справедлива для произвольных последовательных величин λ_n и λ_{n+1}. Решение исходной системы (1.1) – (1.6) определяется итерационным путем и при $\lambda = \lambda_n$ обозначим через

$$\theta(\lambda_n, z, t) = \theta^n(z,t), \quad \omega(\lambda_n, z, t) = \omega^n(z,t),$$

а при $\lambda = \lambda_{n+1}$

$$\theta(\lambda_{n+1}, z, t) = \theta^{n+1}(z,t), \quad \omega(\lambda_{n+1}, z, t) = \omega^{n+1}(z,t).$$

Тогда с учетом разностей

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\delta\theta = \theta(\lambda_{n+1}, z, t) - \theta(\lambda_n, z, t), \quad \delta\omega = \omega(\lambda_{n+1}, z, t) - \omega(\lambda_n, z, t), \quad \Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n,$$

систему (1.1) – (1.6) можно выразить в виде

$$\gamma_0 c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} + \Delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \right) \tag{1.8}$$

$$\delta\theta\Big|_{z=0} = 0, \quad \lambda_n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H} + \Delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z}\bigg|_{z=H} = -\alpha\delta\theta\Big|_{z=H} \tag{1.9}$$

$$\delta\theta\Big|_{t=0} = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \delta\omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} \right) \tag{1.11}$$

$$\delta\omega\Big|_{z=0} = 0, \quad \delta\omega\Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial \delta\omega}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0 \tag{1.12}$$

Для следующих преобразований определим скалярные произведения

$$(u, v) = \int_0^T \int_0^H u(z,t) v(z,t) dz dt, \quad (u, v)\Big|_{z=H} = \int_0^T u(H,t) v(H,t) dt, \quad (u, v)\Big|_{t=T} = \int_0^H u(z,T) v(z,T) dz.$$

Умножим равенство (1.8) на функцию $\psi(z,t)$ и произведем интегрирование по всем внутренним точкам исследуемой области $Q = (0, H) \times (0, T)$. В результате

$$\left(\gamma_0 c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t}, \psi \right) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} + \Delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \right), \psi \right).$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условии (1.9) - (1.10) и, считая $\psi(z,T) = 0, \quad \psi(0,t) = 0$, получим

$$-\left(\delta\theta, \gamma_0 c \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -\alpha(\delta\theta, \psi)\Big|_{z=H} - \left(\Delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left(\delta\theta, \lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)\bigg|_{z=0}^{z=H} + \left(\delta\theta, \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right).$$

Либо учитывая условия (1.9) перепишем его в следующем виде

$$-\left(\delta\theta, \gamma_0 C \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) = -\left(\Delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left(\delta\theta, \lambda_n \frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha\psi \right)\bigg|_{z=H}. \tag{1.13}$$

Затем умножим равенство (1.11) на функцию $u(z,t)$ и произведем интегрирование по всем внутренним точкам исследуемой области $Q = (0, H) \times (0, T)$. В результате

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\left(\frac{\partial\delta\omega}{\partial t},u\right)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\delta\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right),u\right).$$

Предполагая, что $u(z,T)=0$, $u(0,t)=0$ и применяя начальные и граничные условия (1.12) произведем интегрирование по частям по переменным t и z

$$(\delta\omega,u)\Big|_{t=0}^{t=T}-\left(\delta\omega,\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(k\frac{\partial\delta\omega}{\partial z}+k\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z},u\right)\Bigg|_{z=0}^{z=H}-\left(k\frac{\partial\delta\omega}{\partial z}+k\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

получим

$$-\left(\delta\omega,\frac{\partial u}{\partial t}\right)=-\left(\frac{k\mu}{\lambda_n}\Delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}+\frac{k\mu}{\lambda_n}\alpha\delta\theta,u\right)\Bigg|_{z=H}-\left(\delta\omega,k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=H}-\left(\delta\theta,k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=H}+$$
$$+\left(\delta\omega,\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)+\left(\delta\theta,\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)$$

Учитывая граничные условия (1.3), (1.9) и (1.12) получаем

$$\begin{gathered}-\left(\delta\omega,\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial k\mu}{\lambda^2{}_n}\Delta\lambda\left(\theta^{n+1}-T_b\right),u\right)\Bigg|_{z=H}-\left(\delta\theta,\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}u\right)\Bigg|_{z=H}-\left(\delta\omega,k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H}\\-\left(\delta\theta,k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H}+\left(\delta\omega,\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)+\left(\delta\theta,\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\end{gathered}\tag{1.14}$$

Складываем (1.13) и (1.14):

$$-\left(\delta\theta,\gamma_0c\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)-\left(\delta\omega,\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)=-\left(\Delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)-$$
$$-\left(\delta\theta,\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}+\alpha\psi\right)\Bigg|_{z=H}+\left(\frac{\alpha k\mu}{\lambda^2{}_n}\Delta\lambda\left(\theta^{n+1}-T_b\right),u\right)\Bigg|_{z=H}-\left(\delta\theta,k\mu\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}u\right)\Bigg|_{z=H}-\left(\delta\omega,k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H}$$

Функции $u(z,t)$ и $\psi(z,t)$ подбираются таким образом, чтобы имело место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

$$\gamma_0C\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

Тогда

$$\left(\delta\theta,\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}+\alpha\psi+k\mu\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}u\right)\Bigg|_{z=H}+\left(\delta\omega,k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H}=-$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$-\left(\Delta\lambda, \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\left(\Delta\lambda, \frac{\alpha k\mu}{\lambda^2_n}\left(\theta^{n+1}-T_b\right)u\right)\Bigg|_{z=H}.$$

Введем дополнительные граничные условия для параметров ψ и μ на земной поверхности:

$$k\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H}=2A_0\left(\omega|_{z=H}-\omega_q(t)\right),$$

$$\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\alpha\psi|_{z=H}+k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}u\bigg|_{z=H}=2\left(\theta|_{z=H}-T_q(t)\right).$$

В результате выводим равенство

$$2\left(\delta\theta,\theta-T_q\right)\big|_{z=H}+2A_0\left(\delta\omega,\omega-\omega_q\right)\big|_{z=H}=-\left(\Delta\lambda\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial z},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\left(\frac{\alpha k\mu}{\lambda^2_n}\Delta\lambda\left(\theta^{n+1}-T_b\right),u\right)\Bigg|_{z=H} \tag{1.15}$$

В результате преобразований для вывода формулы (1.15) нами была получена задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0 \tag{1.16}$$

$$u|_{z=0}=0,\quad u|_{t=0}=0,\quad k\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H}=2\left(\omega|_{z=H}-\omega_q(t)\right) \tag{1.17}$$

$$\gamma_0 C\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0 \tag{1.18}$$

$$\psi|_{z=0}=0,\quad \psi|_{t=0}=0 \tag{1.19}$$

$$\left(\lambda_n\frac{\partial\psi}{\partial z}+\alpha\psi+k\mu\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{k\mu\alpha}{\lambda_n}u\right)\Bigg|_{z=H}=2\left(\theta-T_q(t)\right) \tag{1.20}$$

Полученная система (1.16) – (1.20) с обратным временем называется сопряженной задачей [2].

Литература:

1. Байманкулов А.Т., Жуаспаев Т.А. Идентификация коэффициента теплопроводности грунта с учетом влаги. // Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №12. - Бишкек, 2016.
2. Жуаспаев Т.А. Сопряженная задача идентификации обобщенного коэффициента. // Республиканский научно-теоретический журнал «Известия вузов Кыргызстана», №3. - Бишкек, 2014.
3. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмайлов А.О. Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний. // Вестник НАН РК, 2008, №2.
4. Адамов А.А., Рысбайұлы Б. Алгоритм численного решения задачи переноса тепла и влаги. // Евразийский математический журнал, 2007, №3.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.