DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, №7, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Канетов Б., Байджуранова А., Жолдошбек кызы Г.

(КҮЧТҮҮ) τ - ФИНАЛДУУ ПАРАКОМПАКТУУ ЖАНА БИР КАЛЫПТУУ τ - ФИНАЛДУУ ПАРАКОМПАКТУУ МЕЙКИНДИКТЕР ЖӨНҮНДӨ

Канетов Б., Байджуранова А., Жолдошбек кызы Г.

О (СИЛЬНО) τ - ФИНАЛЬНО ПАРАКОМПАКТНЫХ И РАВНОМЕРНО τ - ФИНАЛЬНО ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

B. Kanetov, A. Baidzhuranova, Joldoshbek kyzy G.

ABOUT (STRONG) τ - FINALLY PARACOMPACT AND UNIFORMLY τ - FINALLY PARACOMPACT SPACES

УДК: 515.12

Белгилүү болгондой жалпы топологияда паракомпактуу мейкиндиктер негизги ролду ойношот. Бир калыптуу топологияда бир калыптуу мейкиндиктердин бир калыптуу паракомпактуулугунун түрдүү версиялары бар. Мисалы, М. Райстын маанисиндеги бир калыптуу R - паракомпактуулук [9], А. Бөрүбаевдин маанисиндеги бир калыптуу B - паракомпактуулук [2], З. Фроликтин маанисиндеги бир калыптуу F - паракомпактуулук [7], Б. Пасынковдун маанисиндеги бир калыптуу P - паракомпактуулук [8], Л. Апаринанын маанисиндеги бир калыптуу A - паракомпактуулук [1]. Бул илимий макалада (күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуу жана бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуу мейкиндиктер изилденет. (күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуу мейкиндиктердин башка топологиялык касиеттери: мисалы, компактуу, локалдуу компактуу мейкиндиктер менен болгон байланыштары изилденген. (күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуу мейкиндиктердин ω - чагылдыруулар аркылуу мүнөздөмөлөрү тургузулган жана айрым $\tau \leq \aleph_0$ болгон учурда бул мүнөздөмөдөн В.И. Пономоревдун финалдуу компактуу мейкиндиктер жөнүндөгү теоремасы келип чыгышы белгиленген. Бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуу мейкиндиктердин Тамано духундагы мүнөздөмөсү берилген. (күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуу жана бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуулук касиет туюк камтылган мейкиндиктерге берилиши, ошондой эле, компактуу мейкиндиктин (күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуу (бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуу) мейкиндикке болгон көбөйтүндүсү (күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуу (бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуу) болуусу жана каалагандай τ - финалдуу паракомпактуу бир калыптуу мейкиндиктин толуктугу көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *(күчтүү) τ - финалдуу паракомпактуулук, бир калыптуу τ - финалдуу паракомпактуулук, чектүү аддитивдүү ачык жабдуу, σ - локалдуу чектүү жабдуу, финалдуу компактуулук, ω - чагылдыруу.*

Хорошо известно, что паракомпакты играют важную роль в общей топологии. Последнее время интенсивно развивается теория типа компактности пространств. В равномерной топологии существует различные версии равномерной паракомпактности равномерных пространств. Например, равномерная R - паракомпактность в смысле М.Райса [9], равномерная B - паракомпактность в смысле А.Борубаева [2], равномерная F - паракомпактность в смысле З.Фролика [7], равномерная P - паракомпактность в смысле Б.Пасынкова [8], равномерная A - паракомпактность в смысле Л.Апариной [1]. В данной статье исследуется (сильно) τ - финально паракомпактные и равномерно τ - финально паракомпактные пространства. Изучена связь (сильно) τ - финально паракомпактных пространств с другими

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

топологическими свойствами, например, компактными, локально компактными пространствами. Установлены характеристики (сильно) τ - финально паракомпактных пространств при помощи ω - отображений и в частности при $\tau \le \aleph_0$ из этой характеристики следует теорема В И. Пономарева о финально паракомпактных пространств. Даны характеристики равномерно τ - финально паракомпактных пространств в духе Тамано. Показаны, что (сильно) τ - финально паракомпактность и равномерно τ - финально паракомпактность наследуется замкнутыми подпространствами, также показаны, что произведение компактного равномерного пространства на (сильно) τ - финально паракомпактного (соответственно, равномерно τ - финально паракомпактного) пространства (сильно) τ - финально паракомпактного (соответственно, равномерно τ - финально паракомпактного) и полнота всякого равномерно τ - финально паракомпактного равномерного пространства.

Ключевые слова: *(сильно) τ - финально паракомпактность, равномерно τ - финально паракомпактность, конечно аддитивное открытое покрытие, σ - локально конечное покрытие, финально компактность, ω - отображение.*

It is well known that paracompactness play an important role in General Topology. Recently, a theory of compact space type has been intensively developed. In the uniform topology, there are different versions of the uniform paracompactness of uniform spaces. For example, uniform R - paracompactness in the sense of M.D. Rice [9], uniform B - paracompactness in the sense of A.A. Borubaev [2], uniform F - paracompactness in the sense of Z. Frolic [7], uniform P - paracompactness in the sense of B.A. Pasynkov [8], uniform A -paracompactness in the sense of L.V. Aparina [1]. In this article, we study (strong) τ - finally paracompact and uniformly τ - finally paracompact spaces. The connection of (strong) τ - finally paracompact spaces with other topological properties, for example, compact, locally compact spaces.The connection of (strong) τ - finally paracompact spaces is studied with other topological properties, for example, compact, locally compact spaces.The characteristics of (strong) τ - finally paracompact spaces by means of ω - mappings are established, and, in particular $\tau \le \aleph_0$, the theorem of V.I. Ponomarev on finally paracompact spaces follows from this characteristic.The characteristics of uniformly τ - finally paracompact spaces are given in the spirit of Tamano.It is shown that (strong) τ - finally paracompactness and uniformly τ - finally paracompactness is inherited by closed subspaces, it is also shown that the product of a compact uniform space into (strong) τ - finally paracompact (respectively, uniformly τ - finally paracompact) space (strong) τ - finally paracompact (respectively , uniformly τ - finally paracompact) and the completeness of any uniformly τ - finally paracompact uniform space.

Key words: *(strongly) τ - finally paracompactness, uniformly τ - finally paracompactness, finitely additive open covering, σ - locally open covering, finally compactness, ω - mapping.*

Топологическое пространство – Т. Пр., покрытие – Пок., пространство – Пр., локально конечное открытое покрытие - Л. К. О. Пок., звездно конечно - З. К., локально компактно - Л. К., финально паракомпактно - Ф. П., равномерное пространство - Р. Пр., звездно конечное открытое покрытие - З. К. О. Пок., финально компактна - Ф. К., конечное аддитивное открытое покрытие - К. А. О. Пок., открытое покрытие пространство - О. Пок. Пр., открытое покрытие - О. Пок. звездно конечное покрытие - З. К. Пок., финально паракомпактного равномерного пространства - Ф. П. Р. Пр., локально конечное открытое покрытие - Л. К. О. Пок., компактное пространство – К. Пр.

Напомним, что Т. Пр. X называется (сильно) τ - Ф. П. [2], [7], если в каждое его О. Пок. можно вписать (звездно) Л. К. О. Пок. мощности $\le \tau$.

Предложение 1. Любое замкнутое подпространство τ - Ф. П. Пр. τ - Ф. П.

Доказательство. Пусть X - τ - Ф. П. и M - замкнутое подмножество Пр. X . Пусть α_M - произвольное О. Пок. подпространство M . Тогда существует открытое семейство μ Пр. X такое, что $\alpha_M = \mu \wedge M$. Пусть $\alpha = \{\mu, X \setminus M\}$. Очевидно, что α - есть О. Пок. Пр. X . В силу τ - Ф. П. X существует Л. К. О. Пок. β мощности $\le \tau$, которое вписано в α . Пусть $\beta_M = \beta \wedge M$. Тогда

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

легко показать, что β_M - есть О. Пок. подпространства M которое вписано в α_M, также β_M - Л. К. О. Пок. мощности в $\leq \tau$. Следовательно, замкнутое подпространство M является τ - Ф. П.

Следствие 1. Любое замкнутое подпространство Ф. К. пространства Ф. К.

Предложение 2. Любое замкнутое подпространство сильно τ - Ф. П. Пр. сильно τ - Ф. П.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказательство предложение 1.

Теорема 1. Топологическая сумма всякого семейства сильно τ - Ф. П. Пр. сильно τ - Ф. П.

Доказательство. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ произвольное семейство сильно τ - Ф. П. Пр. $X_i, X = \coprod_{i \in I} X_i$ - топологическая сумма этого семейства. Допустим, α - произвольное О. Пок. Пр. X. Очевидно, что семейство $\beta = \{A \cap X_i : i \in I\}$ является О. Пок. Пр. X и оно вписано в Пок. α. Для каждого $i \in I$ положим $\alpha_i = \{A \cap X_i : A \in \alpha\}$. Ясно, что α_i является О. Пок. сильно τ - Ф. П. Пр. X_i. Отсюда следует, что З. К. О. Пок. β_i Пр. X_i мощности $\leq \tau$, вписанное в α. Теперь рассмотрим семейство β, которое состоит из объединении всех семейств β_x, $i \in I$. Легко видеть, что семейства β образует О. Пок. Пр. X. Докажем, что β вписано в α. Каждый элемент семейства β являясь одним из элементов семейства β_x, $i \in I$, будет включаться в некотором элементе семейства β, которое состоит из объединении всех семейств α_i и α. Теперь остается доказать, что β - З. К. Пусть $B \in \beta$. Тогда существует $i \in I$ такой, что $B = B_x$, $B_x \in \beta_x$. Так как β_x З. К. Пок. и X_i дизъюнктны, то B пересекается лишь с конечным числом элементов Пок. β. Следовательно, β является З. К. О. Пок. мощности $\leq \tau$, вписанное в α. Значит X является сильно τ - Ф. П. Пр.

Следствие 2. Топологическая сумма всякого семейства Ф. К. пространств Ф. К.

Теорема 2. Топологическая сумма всякого семейства τ - Ф. К. пространств τ - Ф. К.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказательство теоремы 1.

Теорема 3. Если τ - Ф. К. Пр. X Л. К., то оно сильно τ - Ф. К.

Доказательство. Положим X является τ - Ф. П. и Л. К. Положим α - произвольное О. Пок. Пр. X. В силу Л. К. X для каждой точки $x \in X$ существует окрестность O_x, замыкание $[O_x]$ которой компактно. Пусть $\beta = \{O_x : x \in X\}$. Через γ обозначим внутреннее пересечение Пок. α и β. Тогда существует Л. К. О. Пок. ε мощности $\leq \tau$, вписанное в Пок. γ. Теперь покажем, что замыкание всех элементов E Пок. ε компактны. Для каждого $E \in \gamma$ существует $A \in \alpha$ и $O_i \in \beta$ такие, что $E \subset A$ и $E \subset O_i$. Следовательно, $[E] \subset [O_i]$ т.е. $[E]$ компактно. Легко видеть, что γ является Л. К. О. Пок. $\leq \tau$. Итак, Т. Пр. X является τ - Ф.П.

Следствие 3. Любое К. Пр. является τ - Ф. П.

Следствие 4. Любое К. Пр. является сильно τ - Ф.П.

Следствие 5. Любое К. Пр. является Ф. К.

Теорема 4. Произведение сильно τ - Ф. К. Пр. на К. Пр. сильно τ - Ф. К.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Доказательство. Положим $T = X \times Y$, где X - τ- Ф. П., а Y - компактно. Положим α - произвольное О. Пок. произведение T. Допустим $t = (x, y) \in T$ - произвольная точка. Тогда существует $A_i \in \alpha$ такое, что $t \in A_i$. Потому что множества $U \times V$, где U открыто в X, V открыто в Y, образует базу топологии произведении $X \times Y$, то образует открытые окрестности U_x точки $x \in X$ и окрестности V_y, точки $y \in Y$ такие, что $U_x \times V_y \subset A_i$. Семейства $\{V_y : y \in Y\}$ является О. Пок. компакта Y. Из этого выделим конечное подпокрытие $\{V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}\}$. Положим $W_u = \bigcap_{i-1}^{n} U_u^{\lambda}, i = 1,2,...,n$. Тогда семейство $\gamma = \{W_u : x \in X\}$ является О. Пок. Пр. X, и в которое в силу сильно τ- Ф. П. X можно вписать З. К. О. Пок. λ мощности $\le \tau$. Ниже рассмотрим семейство всех открытых в T подмножеств вида $L \times V_y$, где $L \in \lambda$ легко видеть, что δ есть Пок. T, и оно вписано в Пок. α. Теперь докажем что З. К.О. Пок. δ мощности $\le \tau$. Поскольку З. К.О. Пок. λ мощности $\le \tau$, то каждый элемент L пересекается лишь с конечным числом элементов Пок. λ. Поэтому, $L \times V$, $t = 1,2,...,n$ тоже пересекается лишь с конечным числом элементов Пок. δ. Итак, T считается сильно τ- Ф. П.

Теорема 5. Произведение τ- Ф. П. Пр. на К. Пр.τ- Ф. П.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказательству теоремы 4.

Теорема 6. Если для любого О. Пок. ω Пр. X существует ω- отображение $f : X \to Y$ на некоторое τ- Ф. П. Пр. Y, то X само является τ- Ф. П.

Доказательство. Положим ω - произвольное О. Пок. Пр. X. Тогда существует ω - отображение Пр. X на τ- Ф. П. Пр. Y. Для каждой точки $y \in Y$ существует окрестность O_y, прообраз $f^{-1}O_y$ который содержится в некотором элементе N Пок. ω. Пусть $\beta = \{O_y : y \in Y\}$, где прообраз $f^{-1}O_y$ каждого O_y содержится в некотором элементе Пок. ω. Так как Y - τ- Ф. П., то существует такое Л. К. О. Пок. γ мощности $\le \tau$, вписанное в β. Пусть $\alpha = f^{-1}\beta$. Очевидно, что Пок. α вписано в Пок. ω, и Пок. α является Л. К. О. Пок. мощности $\le \tau$. Из этого следует, что Пр. X является τ – Ф. П.

Теорема 7. Если для любого О. Пок. ω Пр. X существует ω- отображение $f : X \to Y$ на некоторое сильно τ- Ф. П. Пр. Y, то X само является сильно τ- Ф. П.

Доказательство аналогично доказательство теоремы 6.

Следствие 6. Если для любого О. Пок. ω Пр. X существует ω- отображение $f : X \to Y$ на некоторое Ф. К. Пр. Y, то X само является Ф. К.

Пусть (X_U) Р. Пр.

Р. Пр. (X_U) называется Р.τ- Ф. П., если в каждое его К. А. О. Пок. можно вписать σ - Л. К. Р. Пок. мощности $\le \tau$.

Если (X_U) Р. τ- Ф. П. Пр., то Т. Пр. (X, τ_U) является τ- Ф. П. Обратно, если (X_τ) является τ- Ф. П. Т. Пр., то Р. Пр. (X, U_X), где U_X - универсальная равномерность, является Р. τ- Ф. П.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Теорема 8. Положим (X_U) - Р. Пр., bX - произвольное компактное расширение. Для того чтобы Р. Пр. (X_U) было τ - Ф. П., необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset bX \setminus X$ существовало такое σ - Л. К. Р. Пок. $\alpha \in U$ мощности $\leq \tau$, что $[A]_{bX} \cap K = \varnothing$ для любого $A \in \alpha$.

Доказательство. Необходимость. Положим (X_U)- τ- Р. Ф. П. и $K \subset bX \setminus X$ - произвольный компакт. В таком случае, для каждой точки $x \in X$ существует такая открытая в bX окрестность O_x, что $[O_x]_{bX} \cap K = \varnothing$. Очевидно, что $\gamma = \{O_x \cap X : x \in X\}$ - О. Пок. Пр. (X_U). Образуем О. Пок. $\gamma^{\angle}$ Пр. (X_U), взяв в качестве элементов γ. Тогда $\gamma^{\angle}$ - К. А. О. Пок. Пр. (X_U). В Пок. $\gamma^{\angle}$ по условию теоремы можно вписать σ-Л.К. Пок. $\beta \in U$, мощности $\leq \tau$. Тогда $[B]_{bX} \subset [\bigcup_{i=1}^{n}(O_{u_i} \cap X)]_{bX} \subset \bigcup_{i=1}^{n}[O_{u_i}]_{bX}$. Так как $[O_{u_i}]_{bX} \cap K = \varnothing$ для любого $i = 1,2,...,n$, то $[B]_{bX} \cap K = \varnothing$ для любого $B \in \beta$.

Достаточность. Положим α - произвольное К. А. О. Пок. Пр. (X_U). Тогда найдется такое открытое семейство β в bX, что $\beta \wedge \{X\} = \alpha$. Пусть $K = bX \cup \beta$. Отсюда следует, что K - компакт. Тогда найдется такое σ - Л. К. Р. Пок. $\gamma \in U$ мощности $\leq \tau$, что $[\Gamma]_{bX} \cap K = \varnothing$ для любого $\Gamma \in \gamma$. Так как $[\Gamma]_{bX}$ - компактное множество в bX, то существует $B_1, B_2, ..., B_n \in \beta$ такие, что $[\Gamma]_{bX} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Тогда $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \alpha$. Отсюда следует, что (X_U) является Р. τ - Ф. П. пространством.

1. Любое Р. τ - Ф. П. пространство является полным;
2. Любое замкнутое подпространство Р. τ - Ф. П. пространства (X_U) Р. – Ф. П.;
3. Сумма всякого семейства Р. τ - Ф. П. пространств Р. τ - Ф. П.;
4. Произведение Р. τ - Ф. П. Р. Пр. (X_U) на К. Р. Пр. (Y_V) является Р. τ - Ф. П.

Литература:

1. Апарина Л.В., Равномерно линделефовы пространства // Тр.моск.мат. о-во. - 1996. - Т. 57. - С. 3-15.
2. Борубаев А.А., О равномерно-топологических свойствах // Исследование по топологии и геометрии: сб. науч. тр. - Фрунзе, 1985. - С. 18-27.
3. Канетов Б.Э. τ - финально паракомпактные пространства и их обобщения // Вестн. КНУ им. Ж.Баласагына. Естественно-технические науки. Сер. 3: Математика. Информатика. Кибернетика. - 2010. - Вып. 4. - С. 103-108.
4. Пономарев В. О паракомпактных и финально компактных пространствах // Доклад АН СССР. - 1961. - Т. 141. - №3. - С. 561-563.
5. Федорчук В.В. Об ω - отображениях паракомпактных пространств // Вестник Московского государственного университета. - 1963. - №2. - С. 20-24.
6. Isbell J. Uniform space. - Providence, 1964. - 175p.
7. Frolic Z. On paracompact uniform spaces // Czech. Math. J. - 1983. - Vol. 33. - P. 476-484.
8. Pasynkov B.A., Buhagiar D. On uniform paracompactness // Czech. Math. J. - 1996. - Vol. 46(121). - P. 577-586.
9. Rice M.D. A note on uniform paracompactness // Proc. Math. Soc, 1977. – Vol. 62. - №2. - P. 359-362.