

**МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**MATHEMATICAL SCIENCES**

*Сабитова Г.С.*

**ҮН БУЛАКТАРЫН КАЛЫБЫНА КЕЛТИРҮҮ  
МИЛДЕТТЕРИНИН САНДЫК ЧЕЧИМ**

*Сабитова Г.С.*

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ  
ЗВУКОВЫХ ИСТОЧНИКОВ**

*G.S. Sabitova*

**NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM  
OF RESTORING SOUND SOURCES**

УДК: 517.9

*Изилдөө кайтарымы милдеттерди аныктоо оң жагында дифференциалдык теңдемелердин бар түрү тилкелик айкалыштары пункту булактарын боюнча ченелген түпкү ичинде түйүндөрүн функционалынан аны чечүү, алектенишкен буга чейин эчак. Мындай маселелер, көрсө, атайын түрдөгү трансценденттик теңдемелердин сызыктуу эмес системдеринин чечимине байланышат. Учурда түздөн-түз линей эквидистанттык байкоо системасын (антеннанын), бул милдеттер айырма теңдемелер үчүн артка карай коюлат жана Прони ыкмасы катары белгилүү ыкма менен натыйжалуу чечилет. Мында сандык жактан чекиттик үн булактарын калыбына келтирүүнүн математикалык модели жүзөгө ашырылган. Сандык ашыруу тескери маселени чечүү үчүн пайдаланылуучу каршылык Прони алгоритмин, көрсөттү. Тоскоолдуктарды жана ызы-чууларды киргизүүдө үн булактарын калыбына келтирүү мүмкүнчүлүгү көрсөтүлгөн, каталардын ар кандай деңгээлдеринде эксперименттердин натыйжалары келтирилген. Моделди ишке ашыруу үчүн, Maple математикалык системасы колдонулат.*

**Негизги сөздөр:** тескери маселе, үн булактары, калыбына келтирүү, Прони алгоритми, Maple математикалык системасы, сандык чечим.

*Исследованием обратных задач определения правой части дифференциального уравнения, имеющей вид линейной комбинации точечных источников по измеренным в конечном числе точек функционалам от его решения, занимались уже давно. Такие задачи, оказывается, сводятся к решению нелинейных систем трансцендентных уравнений специального вида. В случае прямолинейной эквидистантной системы наблюдений (антенны), эти задачи редуцируются к обратным задачам для разностных уравнений и эффективно решаются методом, известным как метод Прони. В работе численно реализована математическая модель восстановления точечных звуковых источников. Численная реализация показала устойчивость алгоритма Прони, используемого для решения обратной задачи. Показаны возможности восстановления звуковых источников без помех и при внесении шумов, приведены результаты экспериментов при различных погрешностях. Для реализации модели использована математическая система Maple.*

**Ключевые слова:** обратная задача, звуковые источники, восстановление, алгоритм Прони, математическая система Maple, численное решение.

*The study of inverse problems of determining the right side of the differential equation, which has the form of a linear combination of point sources from the functionals of its solution measured in a finite number of points, has been engaged for a long time. Such problems, it turns out, are reduced to solving nonlinear systems of transcendental equations of a special kind. In the case of a rectilinear equidistant observing system (antenna), these problems are reduced to inverse problems for difference equations and are efficiently solved by a method known as the Prony method. The mathematical model of restoration of point sound sources is numerically realized in the work. A numerical implementation showed the stability of the Prony algorithm used to solve the inverse problem. Possibilities of restoration of sound sources without interference and when making noise are shown, results of experiments at various errors are presented. The mathematical system Maple was used to implement the model.*

**Key words:** inverse problem, sound sources, restoration, the algorithm Prony, Maple mathematical system, numerical solution.

**Постановка задачи. Восстановление источников**

Пусть  $u(x)$  – решение уравнения Гельмгольца в  $R^3$ :

$$\Delta u + k^2 u = f(x) = -\sum_{j=1}^m A_j \delta(x - x_j), \quad x \in R^3, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям излучения:

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial x} - iku = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

и известно на некоторой последовательности точек:

$$u(x_l^0) = u_l, \quad l = \overline{0, n-1}. \quad (3)$$

Здесь  $\delta(x - x_j)$  – дельта функция Дирака, сосредоточенная в точке  $x_j$ ;  $A_j$  – положительные числа.

Предположим, что все точки  $x_j$  расположены достаточно далеко от начала координат, в окрестности которого сосредоточены точки  $x_l^0$ :

$$x_j = (r + b_j) w_j, \quad r \gg 1, \quad w_j \in R^3, \quad |w_j| = 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

$$\text{Здесь } r = \min |x_j|, \quad b_j = |x_j| - r.$$

С физической точки зрения  $A_j$  – мощность  $j$ -го точечного источника, а  $x_j$  – суть его координаты;  $k$  – частота:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина волны, последовательность точек  $x_l^0$  – координаты приемников.

Требуется по набору чисел  $\{u\}$  найти местоположение  $x_j$  и мощности  $A_j$  источников, т. е. восстановить структуру правой части уравнения (1).

Редукция обратных задач определения правой части дифференциального уравнения к обратным задачам для разностных уравнений, эффективно решаемых методом, известным как метод Прони, рассматривалась ранее в работах [1, 2, 3].

**Реализация метода Прони**

Шаг 1. *Определение отклонений источников по углу*

Из (1), (2) следует, что

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \frac{A_j e^{ik|x-x_j|}}{4\pi|x-x_j|}. \quad (4)$$

Положим

$$c_j = A_j e^{ikb_j}, \quad \lambda_j = \exp(ikd \langle \omega_j, e_1 \rangle), \quad j = \overline{1, m}, \quad e_1 = (1, 0, 0), \quad 0 < d < \lambda/2.$$

Так как  $|x - x_j| = r + a_j - \langle x, \omega_j \rangle + O(r^{-1})$ , то из (4) и определения чисел  $u_l$  следует, что

$$u_l = \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j^l, \quad l = \overline{0, n-1}. \quad (5)$$

Необходимо вычислить неизвестные  $\lambda_j, j = \overline{1, m}$  в системе уравнений (5).

Согласно методу Прони решается линейная теплицева система уравнений относительно  $m$  неизвестных  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ .

$$\sum_{p=0}^{m-1} u_{p+j} \alpha_j = -u_{p+m}, \quad p = \overline{0, m-1}, \quad (6)$$

где  $u_j, j = \overline{0, m-1}$  – заданные комплексные числа.

Положим  $\alpha_m = 1$ , остальные коэффициенты вычисляем по (6). Для нахождения  $\lambda_j$  в исходной системе (5) составим полином  $m$  – той степени с комплексными коэффициентами  $\alpha_j$ , а именно:

$$P_m(\lambda) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \lambda^j = \lambda^m + \alpha_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_2 \cdot \lambda^2 + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0 = 0,$$

с корнями  $\lambda_j = \exp(ikd\varphi_j), j = \overline{1, m}$ . Здесь  $d$  – расстояние между приемниками;  $k$  – частота ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина волны).

Шаг 2. *Определение мощностей источников*

Неизвестные числа  $c_j$  однозначно находятся из системы (5), так как ее определитель совпадает с определителем матрицы Вандермонда, составленным из различных чисел  $\lambda_j, j = \overline{1, m}$ .

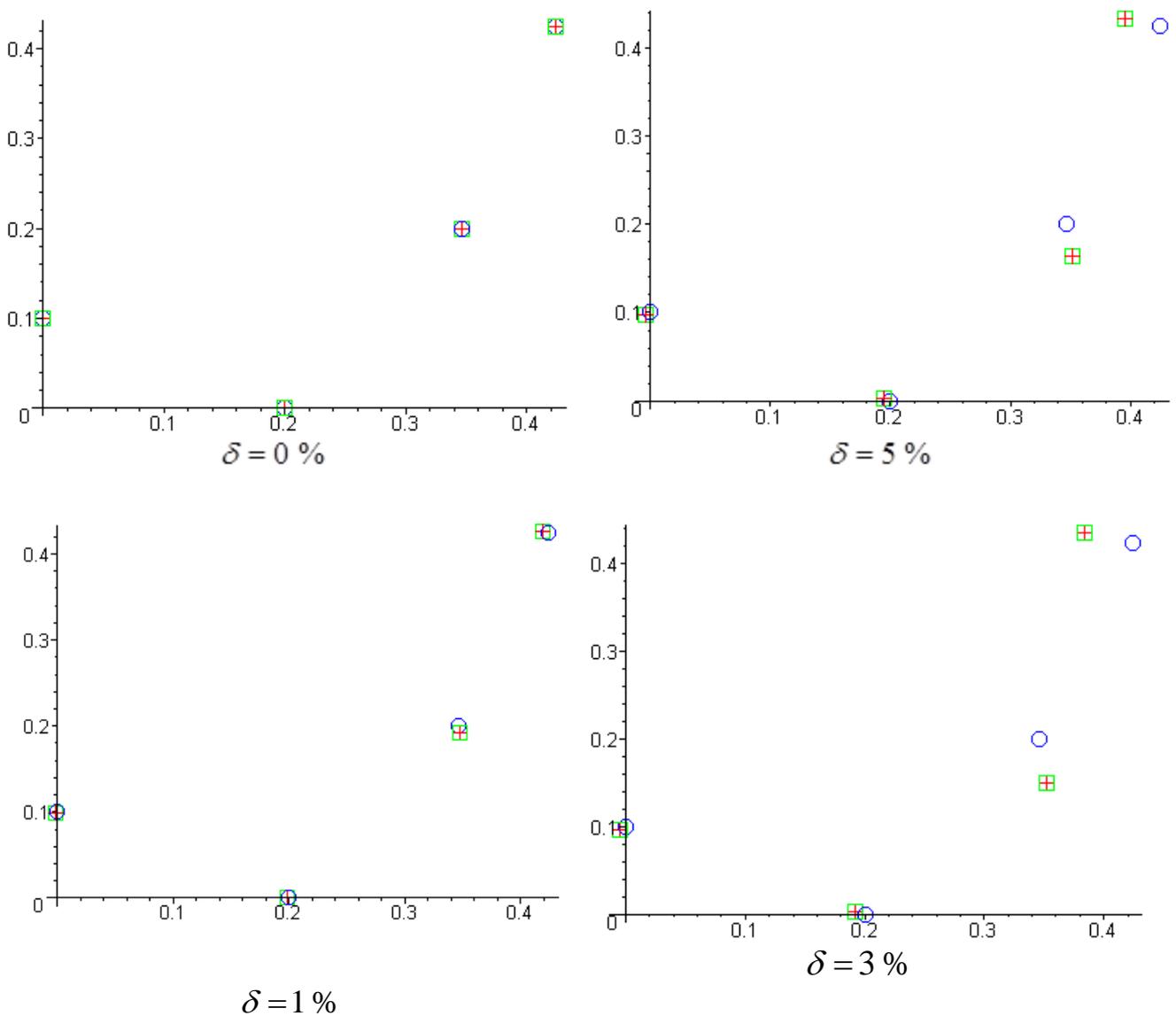
При численной реализации метода Прони использовались данные для 4-х источников. Для простоты реализации положим частоту  $k$  равным единице (из условия  $kd < 2\pi$  при  $d = 1$ ),  $\lambda_j = \exp(i\varphi_j), j = \overline{1, m}$ . Число источников  $n$  связано с числом приемников  $m$  неравенством  $m \geq 2n$ .

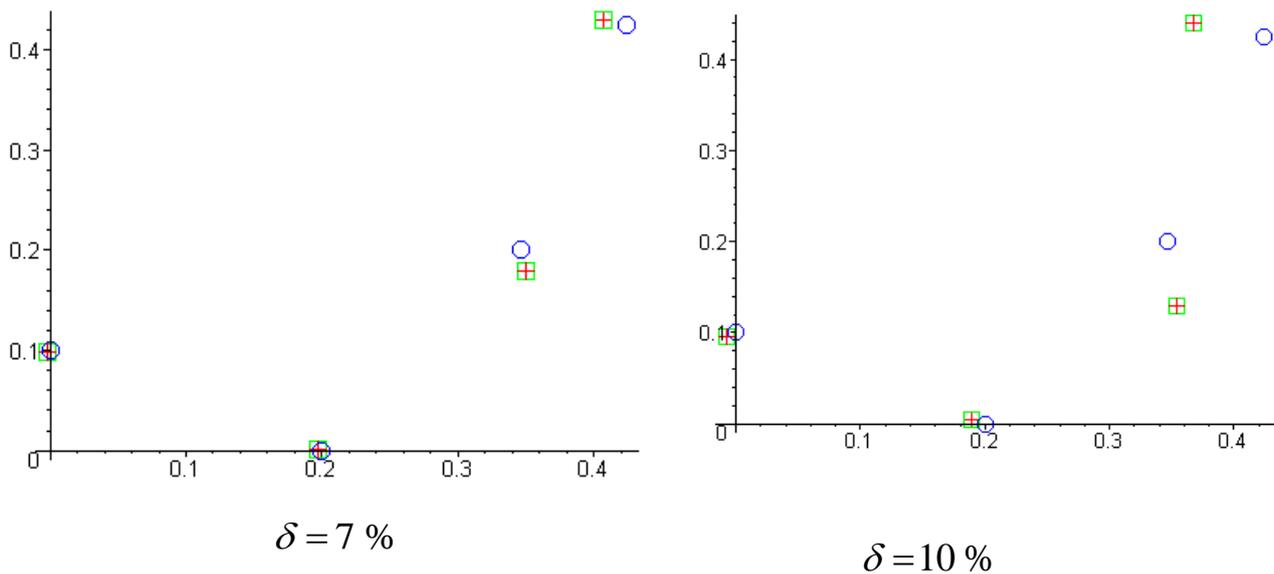
Функции  $u_l, l = \overline{0, n-1}$  вычислялись в  $m = 8$  точках для 4-х источников. Углы наклона  $\varphi_j$  в процессе вычислений меняли. Проведены две группы экспериментов: при наличии шума и без шума. Шум в правую часть системы (5) вводили следующим образом:  $\tilde{u} = \vec{u} + \|\vec{u}\| \delta \vec{\xi}$ , где  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n u_j^2}$ ,

$\delta$  – погрешность и  $\delta = 1\%, 2\%, \dots$ , а  $\vec{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ ,  $\vec{\xi} \in [-1, 1]$ ,  $\xi_j$  – случайная величина, равномерно распределенная на сегменте  $[-1, 1]$ .

Дальше составляется полином степени  $m$ , находятся неизвестные  $\lambda$ , находятся углы, затем, решая теплицеву систему уравнений, восстанавливаются мощности источников.

Для численной реализации алгоритма использованы средства математического пакета Maple. Результаты работы программы можно оценить для случая четырех источников с мощностями  $[0.2, 0.6, 0.4, 0.1]$  и углами  $\left[0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$  соответственно (рис. 1):





**Рис. 1.** Восстановление 4-х источников при различных уровнях шумов.

На графике выведены результаты:

- – исходное положение источников;
- ⊕ – восстановленные источники.

Визуализация метода Прони показала неплохую устойчивость метода в задачах восстановления параметров источников для небольших уровней шумов.

#### Литература:

1. Бухгейм А.Л., Зеркаль С.М., Конев В.Т., Сабитова Г.С. Об одном классе обратных задач в дискретной постановке // Обратные задачи математической физики. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. - С. 57-66.
2. Сабитова Г.С. Оценки устойчивости метода Прони. Препринт №6. - Новосибирск: Института математики СО РАН, 1994. - 17 с.
3. Сабитова Г.С. Устойчивость метода Прони // Труды Стерлитамак. филиала АН РБ. Сер. «физ.-мат. и техн. науки». - Уфа: Гилем, 2006. - Вып. 3. - С. 177-184.