DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Урдалетова А.Б., Малайбек кызы Н.

БИР ТҮР ФУНКЦИОНАЛДЫК ПАРАБОЛАЛЫК КВАЗИСЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ ҮЧҮН МАКСИМУМ ПРИНЦИБИ

Урдалетова А.Б., Малайбек кызы Н.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

A.B. Urdaletova, Malaybek kyzy N.

MAXIMUM PRINCIPLE FOR SOLUTIONS OF A CLASS OF FUNCTIONAL QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

УДК: 517.95

Бул макалада чектелген областа жекече туундулардагы квазисызыктуу параболалык типтеги теңдемелердин айрым бир классы үчүн биринчи түр аралаш маселе каралат. Теңдемелердеги белгисиз функция экиден көп аргументтен көз каранды. Теңдеменин сызыктуу эместиги белгисиз функциянын жогорку тартиптеги туундусунун алдында жайгашкан интегралдык көбөйтүүчү менен шартталат. Интегралдын астында турган функция белгисиз функциянын градиентинин квадратынан көз каранды. Белгилүү болгондой, адатта, практикалык колдонууларда экинчи тартиптеги теңдемелер көбүрөөк кезиккендигинен, макалада экинчи тартиптеги теңдемелер каралган. Макалада, тандалган функционалдык мейкиндиктерде, теңдеменин жана маселенин чектелген жалпыланган чыгарылыштарынын аныктамалары киргизилет. Чектелген жалпыланган чыгарылыштары үчүн априордук энергетикалык барабарсыздык далилденген. Чектелген жалпыланган чыгарылыштар үчүн, ал чыгарылыштардын жана белгилүү функциялардын айрым жылмакайлык шарттарында да, максимум принциби орун алгандыгы көрсөтүлөт.

Негизги сөздөр: *теңдеме, параболалык теңдеме, фунционалдык квазисызыктуу, жалпыланган чыгарылыш, максимум принциби.*

В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для некоторого класса квазилинейных уравнений в частных производных параболического типа в ограниченной области. Неизвестная функция в уравнениях зависит от более чем двух переменных. Нелинейность уравнения обусловлена интегральным множителем, стоящим при старшей производной от неизвестной функции. Подинтегральная функция зависит от квадрата градиента неизвестной функции. Изучаются уравнения второго порядка, так как они чаще встречаются в практических приложениях. Вводятся понятия ограниченных обобщенных решений уравнения и ограниченных обобщенных решений задачи. Для ограниченных обобщенных решений таких уравнений доказана априорная энергетическая оценка. Показано, что для ограниченных обобщенных решений этого класса уравнений, при некоторых условиях гладкости, имеет место принцип максимума.

Ключевые слова: *уравнение, параболическое уравнение, функциональное квазисистемное, обобщенный вывод, принцип максимума, задача, второй порядок.*

In this paper, we consider the first initial-boundary-value problem for a certain class of quasilinear partial differential equations of parabolic type in a bounded domain. An unknown function in equations depends on more than two variables. The nonlinearity of the equation is due to the integral factor standing at the highest derivative of the unknown function. The integrand depends on the square of the gradient of the unknown function. We study second-order equations, which are more often found in practical applications. The concepts of bounded generalized solutions of the equation and bounded generalized solutions of the problem are introduced. For bounded generalized solutions of such equations, an a priori energy estimate is proved. It is shown that for bounded generalized solutions of this class of equations, under certain smoothness conditions, the maximum principle holds.

Key words: *equation, parabolic equation, functional quasi-system, generalized conclusion, maximum principle, problem, second order.*

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Введение.

Вопросы разрешимости и гладкости обобщенных решений различных линейных и квазилинейных уравнений параболического типа второго порядка достаточно хорошо изучены и изложены в, ставших уже классическими, научных монографиях [1],[2],[3], О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой. Известно, что уравнения параболического типа встречаются в различных разделах математики и математической физики и в практических приложениях. Интерес исследователей в этой области вызывают уравнения параболического типа, не входящие в классы уравнений, изученных в [1]. Вопросы разрешимости и гладкости решений некоторых классов неравномерно параболических вырождающихся уравнений достаточно хорошо изучены и изложены в монографии А.В Иванова [4]. Следует заметить, что при исследовании некоторых классов уравнений второго порядка, не являющихся равномерно эллиптическими и параболическими, существенно используются результаты названных авторов.

Данная статья посвящена изучению свойств обобщенных решений некоторого класса уравнений второго порядка параболического типа с интегральным членом, зависящим от квадрата градиента неизвестной функции. В работе, при некоторых условиях гладкости, получена априорная энергетическая оценка обощенных решений через известные постоянные. Далее показано, что при некоторых условиях на известные в задаче функции, имеет место классический принцип максимума.

Основные обозначения.

$E_n - n$ мерное евклидово пространство,

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$ произвольная точка в нем, всюду $n \ge 2$.

$E_{n+1} - n+1$мерное евклидово пространство, точки в котором обозначаем через *(x,t)* , где *x* из E_n , *а t* из $(-\infty,\infty)$.

$\Omega -$ ограниченная область E_n , т.е. произвольное открытое связное множество, содержащееся в какой-нибудь шаре достаточно большого радиуса.

$S-$ граница Ω .

$\overline{\Omega}$ –замыкание Ω , так что $\overline{\Omega} = \Omega \cap S$.

$Q_T -$ цилиндр $Q_T = \Omega \cap [0,T]$, т.е. совокупность точек (x,t) пространства E_{n+1} с $x \in \Omega, t \in [0,T]$.

S_T боковая поверхность Q_T , точнее, совокупность точек (x,t) пространства E_{n+1} , где $x \in S$, $t \in [0,\mathrm{T}]$, $\Gamma_T = S_T \cup \{(x,t): x \in \Omega, t=0\}$,

$S_0 = \{(x,t): x \in S, t=0\}$, $\Gamma_0 = \{(x,t): x \in \overline{\Omega}, t=0\}$.

$U_x = (\mathrm{U}_{x_1},...,\mathrm{U}_{x_n})$,

$\dfrac{\partial U}{\partial x_i} = U_{x_i}$, $\dfrac{\partial U}{\partial t} = U_t$, $U_x^2 = \left|U_x^2\right|$, $\left|U_x\right| = (\sum_{i=1}^n U_{x_i}^2)^{1/2}$, $\left|U_{xx}\right| = (\sum_{i=1}^n U_{x_i x_j}^2)^{1/2}$.

$\|u\|_{2,Q_t}^2 = \int_{Q_t} u^2(x,t)dxdt.$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

1. Ограниченные обобщенные решения

Пусть $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\Omega\subset\mathrm{R}^n$ $Q_T=\Omega\times[0,\mathrm{T}]$-цилиндр, Ω -область, $t\in[0,\mathrm{T}]\subset\mathrm{R}, S_T=S\times[0,\mathrm{T}]$-боковая поверхность Q_T. Пусть Ω -ограниченная область.

Рассмотрим задачу следующего вида:

$$LU\equiv U_t-a(x)\int\limits_{\Omega}(1+U_x^2)dx\cdot\Delta U=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{1.1}$$

$$U(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x), \tag{1.2}$$

$$U(x,t)\big|_{S_T}=0, \tag{1.3}$$

на нахождение функции $U(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (1.1), начальному условию (1.2) и граничному условию (1.3).

Здесь Δ - оператор Лапласа.

Введем линейное банахово пространство $\overset{0}{B}_2(Q_T)$ функций $U(x,t)\in C([0,T]\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Это абстрактные функции непрерывные по $t\in[0,\mathrm{T}]$ и при фиксировании t из $[0,\mathrm{T}]$, являющиеся элементами $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, имеющих конечную норму

$$\|U(x,t)\|_{\overset{0}{B}{}_2^1(Q_T)}=\max\left(\int U_x^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Будем считать, что $a(x)\in C^1(\Omega)$,

$$1<a(x)<l_1,\ l_1=const,\ \left|a_{x_i}(x)\right|\le l_2,\ i=1,2,...,\mathrm{n},\ l_2=const. \tag{1.5}$$

Определение 1. Ограниченным обобщенным решением уравнения (1.1) назовем функцию $U(x,t)\in\overset{0}{B}_2(Q_T)$ с $vrai\max\limits_{Q_T}|U|\angle\infty$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega}U(x,t)\cdot\eta(\mathrm{x},\mathrm{t}_1)dx+\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\Omega}\left[-U\eta_t+\int\limits_{\Omega}(1+U_x^2)dx\cdot U_{x_i}\cdot(a\eta)_{x_i}\right]dxdt=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}f\cdot\eta dxdt, \tag{1.6}$$

при $t\in[0,T]$ для $\forall\eta(x,t)\in\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ с $vrai\max\limits_{Q_T}|\eta(x,t)|\angle\infty,\ f(x,t)\in L_2(Q_T)$.

(Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

Определение 2. Ограниченным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.3) из $\overset{0}{B}_2(Q_T)$ назовем функцию $U(x,t)\in\overset{0}{B}_2(Q_T)$ с $vrai\max\limits_{Q_T}|U|\angle\infty$, при $\forall t\in[0,T]$ удовлетворяющую интегральному тождеству

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\int_\Omega U(x,t_1)\cdot\eta(x,t_1)dx+\int_0^{t_1}\int_\Omega\left[-U\eta_t+\int_\Omega(1+U_x^2)dx\cdot U_{x_i}(a\eta)_{x_i}(x,t)\right]dxdt=$$

$$=\int_\Omega\varphi(x)\cdot\eta(x,0)dx+\int_0^{t_1}\int_\Omega f(x,t)\cdot\eta(x,t)dxdt, \tag{1.7}$$

Для $\forall\eta(x,t)\in\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ с $vrai\max\limits_{Q_T}|\eta|\angle\infty$, $\varphi(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, $\forall t_1\in[0,\mathrm{T}]$.

Покажем, что задачу (1.1), (1,2), (1.3) можно рассматривать, при некоторых условиях, как линейную задачу.

Обозначим

$$\int_\Omega a(x)(1+\mathrm{U}_x^2)dx=b(t).\ \text{Заметим, что}\ b(t)\ge 1\ . \tag{1.8}$$

Отметим, что интегральные тождества (1.6) и (1.7) получаются формальным умножением уравнения (1.1) на соответствующие функции $\eta(x,t)$ и интегрированием по частям.

Далее докажем некоторую энергетическую оценку.

2. Энергетическая оценка.

Пусть $U(x,t)$ ограниченное обобщенное решение задачи (1.1) - (1.3), то есть $U(x,t)$ удовлетворяет (1.7). Кроме того, предположим, что оно является гладким, а именно $U(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q_t}),$ имеет производные $U_{tx_k}\in L_2(\mathrm{Q}_T).$ Возьмем $\eta(x,t)=-\Delta U(x,t)$. Умножим обе части (1.1) на $\eta=-\Delta U$ и проинтегрируем по Q_{t_1}, где $t_1\in[0,T]$,

$$\int_{Q_{t_1}}U_t(-\Delta U)dxdt+\int_{Q_{t_1}}a(x)\mathrm{b}(t)(\Delta\mathrm{U})^2dxdt=\int_{Q_{t_1}}f(x,t)\cdot(-\Delta\mathrm{U})dxdt\,.$$

Проинтегрируем в первом члене по частям. Это приведет нас к равеству

$$\int_{Q_{t_1}}U_{tx_k}\cdot U_{x_k}dxdt+\int_{Q_{t_1}}b(t)a(x)(\Delta\mathrm{U})dxdt=\int_{Q_{t_1}}f(x,t)\cdot(-\Delta\mathrm{U})dxdt\,. \tag{2.1}$$

Заметим, что первое слагаемое в этом неравенстве можно представить в виде:

$$\int_{Q_{t_1}}U_{tx_k}\cdot U_{x_k}dxdt=\frac{1}{2}\int_{Q_{t_1}}\sum_{k=1}^n\frac{d}{dt}(U_{x_k}^2)dxdt.$$

Слагаемое в правой части равенства (2.1) оценим сверху с помощью неравенства Коши с ε. Это приведет нас к неравенству:

$$\int_{Q_{t_1}}f(x,t)\cdot(-\Delta U)dxdt\le\frac{\varepsilon}{2}\|f\|_{2,Q_{t_1}}^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|\Delta U\|_{2,Q_{t_1}}^2\,. \tag{2.2}$$

Используем условия (1.5), (1.8) и неравенство (2.2), в котором положим $\varepsilon=1$.

Это позволяет нам переписать равенство (2.1) в виде следующего неравенства

$$\max_{0\le t_1\le T}\int_\Omega U_x^2(\mathrm{x,t})\Big|^{t_1}dx\le\frac{1}{2}\|f\|_{2,Q_T}^2+\|\varphi\|_{w_2^1(\Omega)}^2\,.$$

Таким образом имеем неравенство

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

$$\|U\|^2_{\overset{0}{B}_2(Q_T)} \le \frac{1}{2}\|f\|^2_{2,Q_T} + \|\varphi\|^2_{w_2^1(\Omega)}. \qquad (2.3)$$

3. Принцип максимума.

На основании неравенства (2.3), доказанного в предыдущем пункте, можно утверждать, что если $U(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ и имеет смешанные производные U_{tx_k}, $k = 1,2,...,n$, $U_{tx_k} \in l_2(Q_T)$, то задачу (1.1), (1.2),(1.3) можно рассматривать, как задачу для линейного параболического уравнения вида:

$$U_t - a(x)b(t)\Delta u = f(x,t), \qquad (3.1)$$

$$U(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (3.2)$$

$$U(x,t)\big|_{S_T} = 0, \qquad (3.3)$$

с условием равномерный параболичности, которое можно выписать на основании (1.5), (1.8) и (2.3) в виде

$$1 \le b(t)a(x) \le \mu_0.$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\|f\|^2_{2,Q_T} + \|\varphi\|^2_{w_2^1(\Omega)} + l_1 + mes(\Omega), \qquad (3.4)$$

$\mu_0 = const$, если $\|f\|^2_{2,Q_T}$, $\|\varphi\|^2_{w_2^1(\Omega)}$ ограничены некоторыми постоянными.

Следовательно, можно пользоваться результатами из теории линейных параболических уравнений (стр. 213, книги [1]).

Таким образом имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 (принцип максимума).

Если $U(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ обобщенное решение уравнения (1.1) с $U_{tx_k} \in L_2(Q_T)$, не превосходящее некоторой M на Γ_T, выполнены условия , (1.5), (1,8) то $\max\limits_{Q_T} U(x,t)$ конечен и оценивается сверху постоянной С, определяемой лишь числами *n*, M, l_1, l_2, μ_0 из (3.4) и $mesQ_T$.

Литература:

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - Москва: Наука, 1967.
2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - Москва: Наука, 1973.
3. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N., “Linear and quasilinear equations of parabolic type”, Providence: American Mathematical Society, 2011, volume 23.
4. Иванов А., Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка. / Труды МИАН СССР, 1982, том 160, 3-285.