DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А.

ВОЛЬТЕРРА ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК СТРУКТУРАСЫНЫН ӨЗГӨЧӨЛҮГҮ ЖӨНҮНДӨ

Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А.

О АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ

A.B. Baizakov, G.A. Dzheenbaeva

ABOUT ASIMPTOTIC STRUCTURE SYSTEM INTEGRATED EQUATIONS VOLTERA

УДК: 517.9

Ийкемдүүлүк теориясынын бир катар маанилүү маселелери, толкундардын эси бар чөйрөдө таралышы, өткөн чакта аракети бар динамикалуу туруктуу эмес башкаруу системаларынын теориясы өзгөчө чекити бар Вольтерра интегралдык жана Вольтерра интегро-дифференциалдык тендемелерге келтирилет. Ар кандай маселелердин арасында, теорияда да жана практикада да, албетте маанилүү, өзгөчө чекити бар Вольтерра интегралдык тендемелердин асимптотикалык жана аналитикалык түзүмү болуп эсептелет. Ушул маселе бул иште каралат. Өзгөчө чекити бар Вольтерра интегралдык тендемелер системасынын асимптотикасы чечимдерди курулган. Област деп координата башталышынын чокусу бар комплекстүү тегиздигиндеги ачык секторду, ал эми берилген системанын чыгарылышын областа голоморфтуу функцияны түшүнөбүз. Өзгөчөлүктөрү бар Вольтерра интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык түзүлүшү тургузулду.

***Негизги сөздөр**: чекиттин айланасы, голоморфдук матрица, өздүк сандар, нильпотент матрицалар, интегралдык теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, өзгөчө чекит, кыркып өзгөртүп түзүү, матрицалык функция, матрицалык чыгарылыш.*

Ряд важных задач теории упругости, распространение волн в средах с памятью, теории динамических нестационарных управляемых систем с последействием приводят к интегральным уравнениям Вольтерра и к интегро-дифференциальным уравнениям Вольтерра с особыми точками. Среди различных задач, несомненно, актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы асимптотической и аналитической структуры решений интегральные уравнения с особыми точками. Именно такая задача изучается в данной работе. Построена асимптотическая структура решений линейных интегральных систем уравнений Вольтерра с особой точкой. Под областью понимаем открытый сектор в комплексной плоскости с вершиной в начале координат. Под решением данной системы понимается голоморфная в области и удовлетворяющая матричная функция. Найдена асимптотическая структура решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

***Ключевые слова:** голоморфная матрица, окрестность точки, собственные значения, нильпотентная матрица, интегральное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, особая точка, срезающее преобразование, матричная функция, матричное решение.*

A number of important problems of the theory of elasticity, the propagation of waves in memory media, the theory of dynamic non-stationary controlled systems with aftereffect lead to Volterra integral equations and to Volterra integro-differential equations with singular points. Among the various problems, undoubtedly relevant for both the theory itself and applications, are the problems of the asymptotic and analytical structure of solutions of integral equations with singular points. This is the problem that is studied in this paper. The asymptotic structure of the soutions of linear integral systems of Volterra eq methods ofr transforming solutions of differential and integral equations, methods of the analytical and asymptotic theory of differential equations and functional

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

analysis.uations with a singular point is constructed. By the region, we mean an open sector in a complex plane with a top at the beginning of coordinates. The solution of this system is a holomorphic in the field and a satisfying matrix function. The asymptotic structure of the solutions of the system of Volterra integral equations by a singularity is found.

Key words: *holomorphic matrix, neighborhood of a point, eigenvalues, nilpotent matrix, integral equation, integro-differential equation, singular point, cuts off the transformations, matrix function, matrix solution.*

Рассмотрим линейную систему вида

$$t^q u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds, \qquad (1.1)$$

$q > 1 -$ целое число,

где $K(t,s) - n \times n$ матрица, голоморфная в окрестности точки $t = s = 0$. Пусть $\lambda_j -$собственные значения $K(0,0)$, $j = \overline{1,n}$. Случай, когда $\lambda_j -$ различные и $Re\,\lambda_j > 0$ рассмотрен в [2,4]. Рассмотрим случай, когда $\lambda_j, j = \overline{1,n}$ принимают кратные значения и $Re\,\lambda_j > 0$.

Под областью S понимаем открытый сектор в комплексной плоскости t с вершиной в начале координат.

Под решением данной системы понимается голоморфная в области S и удовлетворяющая (1.1) в S $n \times 1 -$матричная функция $u(t)$.

Будем использовать и понимать обозначения, введенные в [1].

Продифференцировав по t (I.I), получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$t^q \acute{u}_t(t) = A(t)u(t) + \int_0^t \acute{K}_t(t,s)u(s)ds, \qquad (1.2)$$

где $A(t) = K(t,t) - qt^{q-1}I, I -$ единичная матрица,

$$A(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j, t \to 0, t \in S. \qquad (1.3)$$

В дальнейшем систему (I.2) будем рассматривать как исходную. При исследовании аналитической структуры решения (I.2) будем следовать методике как в [1,2]. Предположим, что собственные значения главной матрицы A_0 распадаются на две группы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ так, что $\lambda_j \neq \lambda_k, j \le p, k > p$.

Из линейной алгебры известно, что если собственные значения главной матрицы $A(t)$ подразделяется на две группы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ так, что $\lambda_j \neq \lambda_k, j \le p, k > p$, то матрица $A(t)$ подобна блочно-диагональной матрице $diag(A^{11}(t), A^{22}(t))$, где $A^{jj}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{jj} t^i, t \to 0$, причем главная матрица A_0^{11} имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, а A_0^{22} $-$собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. На основании этого факта следует, что нахождение асимптотического решения (1.2) при $t \to 0$ сводится к решению уравнений такого же типа для двух блоков $A^{11}(t)$ и $A^{22}(t)$ более низкого порядка. Повторяя эту редукцию, можно в конце концов получить некоторое число уравнений типа (1.2), в которых все собственные значения A_0^{jj}одинаковы, т.е. получим конечную последовательность уравнений типа (I.2), в каждом из которых главная матрица A_0^{jj} имеет только одно собственные значение соответствующей кратности.

Предположим, что (1,2) является результатом такой редукции, и можно считать, что имеет место (1.3), и главная матрица A_0^{jj} имеет только одинаковые собственные значения.

Тогда, не теряя общности, можно считать главную матрицу нильпотентной, т.е. ее единственное собственное значение соответствующей краткости считать нулевым. Действительно, если λ_{rj} является единственным собственным значением A_0^{jj}, тогда преобразование типа:

$$u(t) = zexp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj}, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$$

переводит (1.2) в уравнение вида

$$t^q \acute{z}_t e^{\lambda r_j \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = \left(A^{jj}(t) - \lambda_{rj} I_{rj}\right) z e^{\lambda_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}} + \int_0^t \frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t} z(s) e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}} ds,$$

где главный член матрицы $A(t) - \lambda_{rj} I_{rj}$, есть $A_0^{jj} - \lambda_{rj} I_{rj}$, т.е. нильпотентная матрица.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Также, не ограничивая общности, предположим, что нильпотентная матрица A_0^{jj} имеет жорданову форму, которую всегда можно достичь линейным преобразованием с постоянными коэффициентами, т.е. существует постоянная матрица T, такая что

$$T^{-1}A_0^{jj}T = J(A_0^{jj}) = J_{r_1} \oplus \dots \oplus J_{r_r}$$

где $J_{r_j} = \lambda_{rj} I_{rj} + H_{rj}, H_{rj}$ –матрица сдвига, I_{r_j} –единичная матрица, λ_{r_j} –собственные значения $A_0^{jj}, j = 1, \bar{r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n.$

Таким образом, считаем A_0^{jj} нильпотентной матрицей, имеющий жорданову форму в виде прямой суммы матриц сдвига H_{rj}, причем хотя бы одна из матриц сдвига H_{r_j} имеет размерность, большую единицы и не нулевые элементы
$A_i^{jj}, i > 0$ имеются только в последних строках блоков H_{r_j}.

Следуя методу, предложенному в [1], посредством подстановки $u(t) = S(t)Z, S(t) -$ диагональная матрица вида $diag(1, t^g, t^{2g}, \dots, t^{(n-1)g}$, зависимая от постоянной g, которая выбирается таким образом, что в преобразованном уравнении после умножения на соответствующую степень t главная матрица была отличной от A_0^{jj}, уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$t^q Z_t = B(t)Z + \int_0^t b^*(t,s)Z(s)e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1}-t^{-q+1}}{-q+1}}ds, \qquad (1.4)$$

где

$$B(t) = B_1(t) \oplus \dots \oplus B_2(t), \ \ b^*(t,s) = b_1^*(t,s) \oplus \dots \oplus b_2^*(t,s),$$

$$B_j(t) = \int_j^{-1}(t)K^{jj}(t,t)S_j(t) - \left[t^q S_j'(t)\right]_t, b_j^*(t,s) = S_j^{-1}(t)\frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t}S_j(s).$$

$$S_j(t) = diag(1, t^{g_j}, t^{2g_j}, \dots, t^{(n-1)g_j}, j = \overline{1,r}.$$

Положим в срезающем преобразовании $g_j = g_{j0}$, причем может g_{j0} быть рациональным, не обязательно целым. Тогда, благодаря выбору g_{j0}, матрица $\lim\limits_{t\to 0} t^{-g_{j0}} . B_j(t) = B_j^* 0$ имеет ненулевой элемент на главной диагонали или ниже ее. Выше этой диагонали эта матрица совпадает с A_0^{jj}.

Тогда уравнение (1.4) примет вид:

$$t^{q-g_{j0}}Z_t' = t^{-g_{j0}}B(t)Z + t^{-g_{j0}}\int_0^t b^*(t,s)\, Z(s)e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1}-t^{-q+1}}{-q+1}}ds.$$

Обозначим $h_j = q - g_{j0}$, тогда h_j может принимать как целые, так и рациональные значения.

Если $g_{j0} -$ целое число, то $h_j = q - q_{j0}$, т.е. за исключением случая, когда в результате неоднократного повторения метод срезания понижает либо порядок, либо ранг системы, описанной процедуры приходим к уравнению типа (1.5), где B_{j0} нильпотентна (имеет одно собственное значение нуль) и все диагональные элементы B_{j0} являются матрицами сдвига. И в этом случае можно доказать, что в результате конечного числа повторения срезающего преобразования получим уравнение типа (1.5), в котором B_0 имеет только один жорданов блок, т.е $j = 1$. Допустим, что мы имеем такую задачу $(j = 1)$. Произведем еще одно срезающее преобразование. Если $g_{10} -$ целое, то ранг понижается и редукцию можно продолжить. Если g_{10} –дробь и новая матрица имеет собственные значения, не все равные друг другу, то имеем задачу, которая расщепляется на задачи более низкого порядка. Случай, когда $g_{10} -$ дробь, а главная матрица имеет только одно собственное значение, исключается в силу срезающего преобразования, которое благодаря выбору g_{10} преобразует ее в матрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали или ниже.

Пусть $t^{-g_{j0}}\ B_j(t)$ имеет различные собственные значения, в результате конечного срезания и подобного преобразования главной матрицы B_0 к каноническому виду и g_{j0} принимает дробные значения вида $g_{j0} = \frac{c_j^*}{P_j}$.

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Тогда матричное решение для каждого блока порядка $r_j, j=\overline{1,r}$, будем искать в виде ряда

$$Z_j(t)=\widehat{Z}_j(t)e^{\lambda_{r_{j-1}+e(t)}}c, \qquad (1.6)$$

где

$$\widehat{Z}_j(t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\widehat{Z_{ji}}t^{i/P_j}$$

$$A_{r_{j-1}+e}(t)=\sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1}B_{r_{j-1}+ei}\frac{t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q+1}}{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q+1}+B_{r_{j-1}+e}P_j(q-1)-C_j^*lnt,$$

$r=0, r_j=r_{j-1}+n_j, r_{r-1}+n_r=n, e=\overline{1,n_j}, j=\overline{1,r}.$

$r_j, j=\overline{1,r},$

Подставляя (1.6) в (1.5), для каждого блока порядка $r_j, j=\overline{1,r}.$ имеем

$$t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}}\left(\hat{Z}_j(t)\acute{A}_{tr_{j-1}}+e(t)\right)e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}=t^{q-\frac{b^*}{P_j}}B(t)\hat{Z}_j(t)e^{A_{r_{j-1}+e}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}+$$

$$\int_0^t t^{-\frac{C_j^*}{P_j}}b(t,s)\hat{Z}_j(s)e^{A_{r_{j-1}+e(S)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}}ds. \qquad (1.7)$$

Заметим, что если $f(t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}f_{it}^{ijP_j}, t\to 0, t\in s,$ то справедливо

$$\int_0^t f(s)Z(s)e^{A_{r_{j-1}+e(S)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}}ds=\widetilde{P}_j(t)e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}}, \qquad (1.8)$$

$$\widetilde{P}_j(t)\sim\sum_{i=P_jq+1}^{\infty}\widetilde{P}_{ji}t^{iIP_j}, t\to 0, t\in S. \qquad (1.9)$$

Действительно, продифференцировав по (1.8), имеем

$$f(t)Z(t)e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}=\left\{\bar{P}_{tj(t)}+\tilde{P}_{j(t)}(A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1})_t\right\}e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение относительно $\tilde{P}_j(t)$ в виде

$$t^a f(t)Z(t)=t^a\widehat{P_{jt}}(t)+a(t)\widetilde{P}_j(t),$$

где

$$a(t)=\sum_{i=0}^{d-1}B_{r_{j-1}+ei}t^{\frac{i+c_j^*}{P_j}}+Bdt^{q-1}+\lambda_{r_j,}a(0)=\lambda_{r_j,}d=p_j(q-1)-C_j^*$$

формально приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях последнего уравнения приводит к последовательному определению коэффициентов $\widetilde{P}_jnk, k=1,2,3$

$$\tilde{P}_{jn_1}=\frac{C_{n_1-p_jq}}{\lambda_{r_j}}, C_{n_1-p_jq}=\sum_{i=0}^{n_1-p_1q}f_iZ_{n_1-p_iq-i}, p_jq+1\le n_1\le p_jq+C_j^*,$$

$$\tilde{P}_{jn_2}=\frac{(C_{n_2-p_jq-T_{n_2-C_j^*}})}{\lambda_{r_j}}, T_{n_2-C_j^*}=\sum_{i=p_jq+1}^{n_2-C_j^*}\hat{P}_{r_{j-1}+cn_2-C_j^*-i}, p_jq+C_j^*+1\le n_2\le p_j(2q-1), \tilde{P}_{jn_3}=, n_3\ge p_j(2q-1)+1. \qquad (1.10)$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

Таким образом, (1.8) формально удовлетворяется рядом

$$\sum_{i=p_jq+1}^{\infty} \tilde{P}_{ji} t^{iIP_j}, P_{jP_jq+1} = f_0 Z_0/\lambda_{rj},$$

который согласно голоморфна в S при $|t| < t_0$ и обладает свойством (1.9).

Тогда на основании (1.8) уравнение (1.7) можно записать в виде

$$t^{q-\frac{C_j^2}{P_j}}(\hat{Z}_{tj} + \hat{Z}_j \acute{A}_{r_{j-1}+e(t)})e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+A_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}} B(t)\hat{Z}_j e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}} + \tilde{P}_j(t) e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+A_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}$$

С учетом того, что $\hat{Z}_j(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \hat{Z}_{ji} t^{iIP_j}, \tilde{P}_j(t) \sim \sum_{i=P_jq+1}^{\infty} \tilde{P}_{ji} t^{iIP_j}$,

и $\acute{A}_{r_{j-1}+e(t)} = \sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1} B_{r_{j+1}+ei} t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q} + B_{r_{j-1}+e} d t^{-1}, d = p_j(q-1) - C_j^*$,

получим уравнение вида

$$t^{q-\frac{c_j^*}{P_j}-1}\left(\frac{i}{P_j}\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{Z_{ji}} t^{i/P_j}\right) = t^{q-\frac{c_j^*}{P_j}-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} B_{r_{j-1}+ed+1+i} t^{\frac{i+j}{P_j}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{Z_{ji}} t^{i/P_j}\right) + \sum_{i=p,q+1}^{\infty} P_{ji} t^{i/P_j} \qquad (1.11)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях в (1.11), определим все коэффициенты $\hat{Z}_{jm_k}, k = 1,2,3,4,$

$$\hat{Z}_{jm_1} = \frac{P_j}{m_1}\left\{\sum_{i=1}^{m_1} Bd + i \cdot \hat{Z}_{m_1-i}\right\}, d = p_j(q-1) - C_j^*,$$
$$1 \le m_1 \le P_j,$$
$$\hat{Z}_{jm_2} = \frac{P_j}{m_2}\left\{\sum_{i=1}^{m_2} Bd + i \cdot \hat{Z}_{m_2-i} + \frac{1}{\lambda_{r_j}}\left(\sum_{j=1}^{C_j^*} b_j^* \hat{Z}\, c_j^* - j\right)\right\},$$
$$p_j + 1 \le m_2 \le P_j + C_j^*,$$
$$\hat{Z}_{jm_3} = \frac{P_j}{m_3}\left\{\sum_{i=1}^{m_3} Bd + i \cdot \hat{Z}_{m_3-i} + \frac{1}{\lambda_{r_j}}\left(\sum_{j=1}^{P_j(2q-1)} b_j^* \hat{Z}\, p_j(q-1)j - \frac{1}{\lambda_{r_j}}\sum_{i=1}^{P_j(q-1)-C_j^*} P_{p_jq+i} B_{d-i}\right)\right\}, P_j + e_j^* + 1 \le m_3$$
$$\le P_j q, Z_{jm_4}$$
$$= \frac{P_j}{m_4}\left\{\sum_{i=1}^{m_4} B_{d+i}\hat{Z}_{m_4-i} + \frac{1}{\lambda_{r_j}}\sum_{j=1}^{m_4-P_j} b_j^* \hat{Z}_{m_4-P_j-j} - \frac{1}{\lambda_{r_j}}\sum_{j=1}^{m_4-P_j-C_j^*} P_{pjq+j} B_{m_4-P_j-c_j^*-j} - \frac{m_4}{P_j}P_{m_4}\right)\right\}, \hat{Z}_{j0}$$
$$= I_{rj}, j = \overline{1,r}.$$

Тогда решение уравнения (1.5) представляет собой прямую сумму решений систем более низкого порядка $r_j, j = \overline{1,r}$, из которых это уравнение состоит. Такое матричное решение можно записать в таком виде:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1(t)e^{A_{r_1}(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2(t)e^{A_{r_2}(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_r(t)e^{A_{r_r}(t)} \end{pmatrix} = \hat{Z}(t)e^{A(t)}c, \qquad (1.12)$$

где

$$A(t) = diag(A_{r_{j-1}+1}(t), \dots, A_{r_{j-1}+n_j}(t)),$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 9, 2019

$$A_{r_{j-1}+e(t)} = \sum_{i=0}^{d-1} B_{r_{j-1}+ei} \frac{t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}} - q + 1}{\frac{i + C_j^*}{P_j} - q + 1} + B_{r_{j-1}+e} dent,$$

$$d = P_j(q-1) - C_j^*,$$

$$\hat{Z}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \hat{Z}_i t^{i/P_j}, det\hat{Z}_0 \neq 0,$$

$r_0 = 0, r_j = r_{j-1} + n_j, r_{r-1} + n_r = n, e = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, r}.$

Причем $B_{r_{j-1}+e}$ имеет различные собственные значения $\lambda^*_{r_{j-1}+e}$ в результате конечного срезания и подобного преобразования главной матрицы к каноническому виду и $A(t)$ является диагональной матрицей, где ее элементы являются более низкого порядка $r_j, j = \overline{1, r}$.

Сформулируем полученные для системы (1.1) в случае кратных собственных значений главной матрицы $K(0,0)$. Все преобразования, которые должны, в конечном счете привести к асимптотическому решению (1.1) и применяются к системам более низкого порядка, можно представить как одну замену переменных в виде

$$u(t) = S(t) Z exp \frac{t^{-q+1}}{-q+1} \lambda_{rj},$$

Подставляя вместо Z в (1.13) матричное решение в виде (1.12) и комбинируя $exp \frac{t^{-q+1}}{-q+1} \lambda_{rj} \cdot c\ expA(t)$, получим фундаментальное матричное решение уравнения (1.1) на случай кратных собственных значений в виде

$$u(t) = \hat{u}(t) e^{\tilde{A}(t)} \cdot C,$$

где $\hat{u}(t) -$ обладает асимптотическим разложением по степеням $\tilde{A}(t) -$ диагональная матрица, где диагональные элементы имеют разложение по степеням $t^{-1/P}, c -$ произвольный вектор столбец.

Теорема 1. Пусть $K(t,s) = n \times n$ матрица, голоморфная в окрестности точки $t = s = 0, t \in S,$ где $S -$ сектор с вершиной в начале координат, содержащий вещественный полуось, и $K(0,0)$ имеет кратные собственные значения λ_{rj} и выполняется условие $Re\lambda_{rj} > 0, j = \overline{1, r}$. Тогда уравнение (1.1) в каждом достаточно узком подсекторе $S^* \in S$ имеет матричное решение вида

$$u(t) = \hat{u}(t) e^{\hat{A}(t)},$$

где $\tilde{A}(t) -$диагональная матрица, диагональные элементы которой являются диагоналными матрицами порядка $r_j, j = \overline{1, r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$ с диагональными элементами, имеющими разложение относительно $p -$положительное целое, $\hat{u}(t)$ обладает асимптотическим свойством разложения по степеням $t^{1/P}$.

Литература:

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968.
2. Байзаков А.Б. Асимптотические разложения решений интегральных уравнений Вольтерра // Исслед. поинтегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1984. - Вып. 17.
3. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1958.
4. Horn J. Singulare susteme linearer Volterrascher Jntegralnchungen // Math. Zeitsher. -1919. - T.3. - S.263-313.