DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 3, 2021

Сражидинов А., Абдраева Н.И., Бекмурзаева Б.А.

ФЕРМАНЫН УЛУУ ТЕОРЕМАСЫН КӨРСӨТКҮЧҮ 4 УЧУРУНДА ЭЛЕМЕНТАРДЫК ДАЛИЛДӨӨ

Сражидинов А., Абдраева Н.И., Бекмурзаева Б.А.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА ПРИ ПОКАЗАТЕЛЕ 4

A. Srashidinov, N. Abdraeva, B. Bekmurzaeva

THE ELEMENTARY PROOF OF FERMAT'S LAST THEOREM FOR THE EXPONENTS 4

УДК: 511.521

1637-жылдан 1995-жылга чейин, б.а. 360 жылдай мезгилди кучагына алган аралыкта мектеп окуучуларынан тартып аттуу-баштуу математиктердин бүйүрүн кызыткан математикалык проблемалардын сап башында Ферманын улуу теоремасын далилдөө маселеси турган десек аша чапкандык болбосо керек. Макаланын максаты $x^4 + y^4 = z^4$ теңдемесинин натуралдык сандар көптүгүндө чечими жок экендигин мектеп окуучуларына мүмкүн болушунча түшүнүктүү ыкма менен далилдеп, аны жана айрым учурларды, мисалы $x^3 + y^3 = z^3$ теңдемеси үчүн да далилдөөнү жөнөкөйлөтүп, натыйжада аларды факультативдик курска киргизүү сунуш кылынат. Дагы бир белгилөөчү маселе – макалада колдонулган ыкма окуучулардын кызыгуусун пайда кылып, аны дагы кандай маселелерге колдонсо болот деген ой – жоромолдорго алып келээри бышык. Факультативдик сабактарда акырке маселенин айланасында да терең ой жүгүртүү зарыл деп ойлойбуз.

***Негизги сөздөр:** каршысынан, далилдөө, сан, жуптук, даража,, сандар, теория, теорема, көрсөткүчү, элементардык, далилдөө.*

В периоде, охватывающим лет 360, начиная с 1637 года с до 1995 года, среди общеизвестных математических проблем, наверняка, занимала одно из первых мест - проблема доказательства Великой теоремы Ферма. Доказательством скрыто или открыто занимались почти все известные математики того периода, даже увлеченные математикой школьники. В сообщении приводится настолько упрощенное доказательство того, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ в классе натуральных чисел не имеет решений, могли без напряжений понять школьники. Тем самым, этот случай, а также случай $x^3 + y^3 = z^3$, мы предлагаем вводить в факультативный курс школьников. Следует заметить, что способ доказательства теоремы, предложенный в статье, заслуживает внимания читателей в том разрезе, что какие еще задачи могут решаться этим способом. Вокруг последней проблематики на факультативных занятиях, нам кажется, необходимо останавливаться особо.

***Ключевые слова**: напротив, доказательство, число, пара, степень, числа, теория, теорема, показатель степени, элементарный, доказательство.*

In the period spanning 360 years, from 1637 to 1995, among the well-known mathematical problems, the problem of proving the Great Theories of Fermat probably occupied one of the first places. Almost all well-known mathematicians of that period, even schoolchildren who were keen on mathematics, were involved in the proof either covertly or openly. The message contains just a simplified proof that the equation $x^4 + y^4 = z^4$ in the class of natural numbers has no solutions, schoolchildren could easily understand. Thus, this case, as well as the case $x^3 + y^3 = z^3$, we propose to introduce an optional course for schoolchildren. It should be noted that the method of proving the theorem proposed in the article deserves the attention of the readers in the context of what other problems can be solved in this way. It seems to us that it is necessary to dwell especially on the latter problematics in optional classes.

***Key words:** opposite, proof, number, pair, degree, numbers, theory, theorem, exponent, elementary, proof.*

Тарыхы бай жана атактуу математиктердин, кала берсе катардагы эле математиктердин да кызыгуусун пайда кылган проблемалардын сап башында Ферманын улуу теоремасы болуп келди. Аталган проблеманы Франциялык улуу математик Пьер де Ферма 1637-жылы II кылымдарда жашаган математик Диофанттын «Арифметикасын» окуп жатып, Пифагордун (б.з.ч. IV кылымда жашаган математиктин) теоремасы келтирилген беттин бош талаасына «Толук кубду кубдардын суммасына, төртүнчү даражаны- төртүнчү даражалардын суммасына, деги эле жогорку даражаларды ушундай эле даражалардын суммасына ажыратууга мүмкүн эмес. Бул бүтүмдүн ажайып кыска далилдөөсүн мен таптым. Бирок аны келтирүү үчүн бул китептин бош аятчасы өтө эле жетишсиз» деп белгилеген. Дээрлик 350 жыл бою проблема, б.а. $z^n = x^n + y^n = n \geq 3$ теңдемеси натуралдык сандардын көптүгүндө чечимге ээ эместиги далилденбей келди. (1) теңдемеси көрсөткүч n дин айрым учурларында, мисалы $n=3$ учурун улуу математик Эйлер 1768-жылы далилденен, бардык $n \leq 100$ маанилери үчүн таланттуу немец математиги Куммер 1930-жылдары, ал эми *ЭВМ*дин жардамында 1934-жылы бардык $n \leq 100000$ учурлар үчүн Вандимер далилдей алган. Ферманын улуу теоремасы жөнүндө библиографиялар көп, мисалы [1-3] жана интернет тармактарынан да карасаңыз болот. Англиялык математиктер коому 1995-жылы англиялык белгилүү математик

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

Эндрю Уайлс[4,5] проблеманы толук чечкендиги тууралуу белгилеген. Анын далилдөөсү 100 беттей болуп, сандар теориясынын акыркы жетишкендиктерине негизделген. Ферманын улуу теоремасынын анын негиздөөчусу белгилегендей «ажайып кыска далилдөөсүн» табуу дале актуалдуулугун жогото элек деп ойлолбуз. Бул багытта авторлордун биринин макаласын [6] белгилей кетсек болот.

Биздин максатыбыз – аталган теореманын жеке $n = 4$ учурун жөнөкөй далилдөө аркылуу мектеп окуучуларын математика предметине кызыктыруу, алардын логикалык ой жүгүртүү жөндөмүн арттыруу, ошондой эле мектептин математикалык факультивдик программасына Ферманын улуу теоремасын мейли, аны толук түрдө болбосо да, айрым, айталы $n = 4$, $n = 3$ учурларын кийирүү, туура болот деген ойдобуз.

Натуралдык сандар көптүгүндө

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (1)$$

теңдесин карайлы. Натуралдык сандар көптүгүндө карайлы. Аталган көптүктү көнүмүш болгондой, N аркылуу белгилейбиз. (1) теңдемеси үчүн төмөнкү бүтүмдү далилдейбиз.

Теорема 1. N көптүгүндө (1) теңдемеси чечимген ээ болбойт.

Далилдөөго зарыл болгон түшүнүкөрдү карайлы. Жазууну кыскартуу максатында бүтүн санды жөн эле сан деп атайбыз; ***а*** саны ***в*** санына калдыксыз бөлүнсө $а \equiv в$, ал эми а саны в санына калдыксыз бөлүнбөсө $\boldsymbol{а \not\equiv в}$ аркылуу белгилейбиз.

Аныктама 1. Эгерде а жана р ≥ 0 сандары үчүн төмөнкү байланыштар

$$a \equiv 2^p \ , a \not\equiv 2^{p+1}$$

орун алса, анда **р** санын ***a*** нын жуптугунун даражасы деп атайбыз жана $р = \omega(a)$ аркылуу белгиейбиз.

а жана **в** өз ара жөнөкөй сандар болсо $D(a, в) = 1$ аркылу белгилейбиз.

Кошумча дагы бир айтылышты далилдейли.

Лемма 1. Өз ара жөнөкөй сандар болгон a, $в$ жана c сандары үчүн $a^2 + b^2 = c^2$ (2) барабардыгы качан гана m, n сандары өз ара жөнөкөй жана $2mn = а$, $m^2 - n^2 = b$, $m^2 + n^2 = с$ (3) барабардыктары аткарылганда гана орун алат.

Далилдөө. Жетиштүү шарты. (3) барабардыктарынан (2) барабардыгы түздөн-түз келип чыгат. $D(m,n) = 1$ ден $D(b,c)=1$ди алабыз, мындан $D(a,b) = 1$, $D(a,c)=1$; $2mn = a$ барабардыгынан a сананын жуптугу келип чыгат.

Зарыл шартын көргөзөлү, с санынын жуптугунан a жана b сандарынын тактыгы келип чыгат. ($a^2+в^2$) саны 4 кө бөлүнбөйт, ал эми c^2 саны 4кө бөлүнөт. Чынында эле, $a = 2a_1 - 1$, $b = 2b_1 - 1$, $c = 2c_1$ десек, мында a_1, b_1, c_1 – белгилүү сандар. Акыркы барабардыктан тапсак $a^2 = 4(a_1^2 + a_1) + 1$, $b^2 = 4(b_1^2 + b_1) + 1$, $c^2 = 4c_1^2$. Табылган маанилерди (2) барабардыгына койсок $4(a_1^2 + a_1 + b_1^2 + b_1) + 2 = 4c_1^2$. Акыркы бараабардыктын сол жагы 4 кө бөлүнбөйт, оң жагы 4 кө бөлүнөт. Демек, ***c*** так, ***a*** жана ***b*** нын бири жуп, башкасы так болот. Ошондуктан эч кандай чектөөсүз эле, ***a*** жуп, ***b*** жана ***c*** так деп алабыз. Барабардык (2) ни $a^2 = c^2 - b^2$, $a^2 = (c - b)(c + b)$ түрүндө жазып жана $(c - b)/2$ жана $(c + b)/2$ сандарынын өз ара жөнөкөйлүгү c жана b жөнөкөйлүгүнон келип чыгарын эске алсак, анда

$$\mathrm{a}^2 = 4\frac{c-b}{2}.\frac{c+b}{2}, \ D(\frac{c-b}{2}, \frac{c+b}{2}) = 1 . \qquad (4)$$

Акыркы барабардыктардан

$$\frac{c-b}{2} = m^2, \frac{c+b}{2} = n^2$$

ээ болобуз. Лемма далилденди. Дагы бир бүтүм келтирели.

Лемма 2. Эгерде A, B, C так сандар болсо**,** анда

$$A^2 - B^2 = 4C \qquad (5)$$

барабардыгы аткарылбайт**.**

Далилдөө. Чынында эле, (5) барабардыгын төмөнкүчө жазабыз:

$$(A - B)(A + B) = 4\ C. \qquad (6)$$

A, B, C так сандар болгондуктан, $(A - B)$, $(A + \mathrm{B})$ көбөйтүүчүлөрүнүн бири сөзсүз 4кө, башкасы 2ге, б.а. (6) нын сол жагындагы көбөйтүндү 8ге, ал эми оң жагы 4кө гана бөлүнөт. Демек, (6) барабардыгы N көптүгүндө чечимге ээ болбойт.

Теореманы далилдөөнү улантабыз. Карама каршысынан далилдейбиз. Анда кандайдыр натуралдык x,y жана z сандары учун (1) барабардыгы орун алат. Эч кандай чектөөсүз эле, $D(x, y)=1$, $D(x, z)=1$, $D(y, z)=1$, x жуп, y жана z так деп божомолдосок болот. (1) барабардыгын

$(x^2)^2 + (y^2)^2 = (z^2)^2$ көрүнүшүндө жазып, лемма 1 негизинде

$$x^2 = 2mn, y^2 = m^2 - n^2, z^2 = m^2 + n^2 \qquad (7)$$

DOI:10.26104/IVK.2019.45.557

туюнтмаларына ээ болобуз, мында m жана n өз ара натуралдык сандар, б.а. D(m,n) =1. Лемма 1 негизинде (7) нин акыркы барабардыктарынан m так, n жуп сандар экендиги келип чыгат. Ошондуктан ω(x^2)= ω($2mn$), мындан 2 ω(x) = 1+ ω(n) , же ω(x) даражасын q аркылу белгилесек,

$$\omega(n) = 2q-1 \ (q= \omega(x)), \qquad (8)$$

барабардыгына ээ болобуз. Биз q кандай гана натуралдык сан болбосун (1) теңдемеси карама каршылыкка алып келерин көргөзөбүз, б.а. теорема 1 ди далилдеген болобуз. $x^2 = 2mn$ ден

$$m = m_1^2 \ , n = (z - m_1^2)\ (z + m_1^2\ ) \qquad (9)$$

экендиги келип чыгат. Анда (7) дин акыркы теңдемесинен табабыз:

$$z^2 = m_1^4 + 4n_1^4\ . \qquad (10)$$

(7) ден ω(n)=1+2 ω(n_1), эми (6) нын негизинде ω(n_1) = q–1 (11) болот. Эгерде q= 1 болсо, ω(n_1) = 0, б.а. n_1 так сан болот . Бул учурда (10) теңдемесин

$$4n_1^4 = z^2 - m_1^4\ ,\ 4n_1^4 = (z - m_1^2)\ (z + m_1^2\ ) \qquad (12)$$

түрүндө жазып алабыз. z, m_1^2, n_1^4 так сандар болгондуктан , Лемма 2 негизинде (12) барабардыгы аткарылбайт. Демек, q≠1.

Эми q≥2 деп (10) теңдемесин карайлы. Лемма 1 дин негизинде

$$2n_1^2\ = 2m_2n_2,\ m_1^2 = \ m_2^2 - n_2^2\ , \qquad (13)$$

катыштарына ээ болобуз, мында m_2, n_2 – натуралдык сандар жана D(m_2, n_2) = 1

(13) тун биринчисинен $2\omega(n_1) = \omega(n_2)$. Мындан (11) дин негизинде

$$\omega(n_2) = 2(\ q - 1)\ . \qquad (14)$$

Ошондой эле (13) тун биринчисинен

$$m_2 = m_3^2\ ,\ n_2 = \ n_3^2 \qquad (15)$$

экендиги келип чыгат, Ал эми акыркы барабардыктан -

$$2\ \omega(n_3) = \omega(n_2),\ \omega(n_3) = q - 1. \qquad (16)$$

(13) жана (15) барабардыктарынан алабыз:

$$m_1^2 = \ m_3^4 - n_3^4\ . \qquad (17)$$

Акыркы барабардыктан лемма 1 дин негизинде

$$n_3^2 = 2m_4n_4,\ m_3^2 = m_4^2 + n_4^2\ ,\ 2\ \omega(n_3) = 1 + \omega(n_4)\ , \qquad (18)$$

экендиги келип чыгат. (18) дин биринчисинен тапсак :

$$m_4 = m_5^2\ ,\ n_4 = 2n_5^2,\ \omega(n_4) = 1 + 2\ \omega(n_5),\ \ \omega(n_5) = q-2\ . \qquad (19)$$

Анда (18) теңдемеси төмөнкү көрүнүштө жазылат :

$$m_3^2 = m_5^4 + 4n_5^4,\ \ \omega(n_5) = q - 2. \qquad (20)$$

Эгерде q = 2 болсо, анда (19) дан көрүнүп тургандай, $\omega(n_5)$ = 0, б.а. $\omega(n_5)$ так сан болот. Демек, $A = m_3$, B= m_5^2 жана C= n_5^4 так сандар болгондуктан, лемма 2 нин негизинде (20) барабардыгы аткарылбайт, б.а. q = 2 болбойт. Жогор жактагы процедураны пайдаланып, q≠3, q ≠4, ... экендигине ишенебиз. Жыйнтыктап айтканда, эгерде (1) теңдемеси N көптүгүндө чечимге ээ болгондо , анда q= ω(x) бүтүн оң сан болмок. Бул далилденгенге каршы келет. Теорема далилденди.

Адабияттар:

1. Саймон Сингх. Великая теорема Ферма.-М.: МЦНМО. – 2000.-288 с
2. Ферма П. Исследования по теории и диофантову анализу – М.: Наука, 1992.
3. Edwards H.M. Fermat`s Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. – Springer,1977.
4. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat`s Last Theorem// Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 443-551.
5. Taylor R., Wiles A. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras// Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 553-572.
6. Сражидинов А. Элементарное доказательство Великой теоремы Ферма, адаптированное для факультативного курса школьников // Известия ОшТУ - №2, 2020. - С.205-212.
7. Сражидинов А. Об одном подходе к доказательству великой теоремы ферма для показателя 4. Известия ВУЗов Кыргызстана. 2018. №. 5. С. 10-12.