DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2022

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б., Акимканова Ш.Ж.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ПСЕВДО-ПАРАБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ БАШТАПКЫ-ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б., Акимканова Ш.Ж.

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

B. Ablabekov, A. Baiserkeeva, Sh. Akimkanova

THE SECOND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL PSEUDO-PARABOLIC EQUATION

УДК: 517.95

Макалада эки өлчөмдүү үчүнчү даражадагы псевдопараболикалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы-чек ара маселесин тик бурчтуу аймакта изилдөөгө арналган. Фурьенин өзгөрмөлөрдү ажыратуу ыкмасына негизделген. Бул маселенин чечими катардын суммасы катары түзүлөт. Каралып жаткан маселенин классикалык чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы тууралуу теорема далилденген. Фурье ыкмасы коюлган маселенин чечиминин бар экендигин жана жалгыздыгын далилдөө үчүн колдонулат. Коюлган маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгын далилдеш үчүн жетиштүү шарттар алынган жана тиешелүү теорема далилденген. Коши-Буняковский жана Бессель барабарсыздыгынын жардамы менен алынган катарлардын белгисиз функцияга жана алардын үчүнчү даражага чейинки туундуларына карата абсолюттук жыйналуусу далилденет. Андан ары үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялар мейкиндигинде баштапкы чектик маселенин чечими алынат жана негизделет. Чыгарылыш үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү мейкиндикте негизделген жана анын түзүлүшү катар түрүндө алынган.

***Негизги сөздөр**: псевдопараболалык тендеме, экинчи түрдөгү чектик маселе, классикалык чыгарылыш, Фурьенин ыкмасы.*

Работа посвящена изучению в прямоугольной области второй начально-краевой задачи для двумерного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Использован метод разделения переменных Фурье, основанный на разделении переменных. Решение этой задачи построено в виде суммы ряда. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Для доказательства существования и единственности решения поставленной задачи применен метод Фурье. Получены достаточные условия однозначной разрешимости поставленной задачи и доказаны соответствующие теоремы. С помощью неравенства Коши-Буняковского и Бесселя доказывается абсолютная сходимость рядов относительно неизвестной функции и их производных до третьего порядков. Далее, в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций получено и обосновано решение исходной начально-краевой задачи.

***Ключевые слова:** псевдопараболическое уравнение, начально-краевая задача, классическое решение, метод Фурье, малый параметр.*

The work is devoted to the study in a rectangular region of the second initial-boundary value problem for a two-dimensional third-order pseudoparabolic equation. The method of separation of variables Fourier, based on the separation of variables, was used. The solution to this problem is constructed as the sum of a series. Existence and uniqueness theorems for the classical solution of the problem under consideration are proved. The Fourier method is used to prove the existence and uniqueness of a solution to the problem posed. Sufficient conditions for the unique solvability of the formulated problem are obtained and the corresponding theorems are proved. With the help of the Cauchy-Bunyakovsky and Bessel inequality, the absolute convergence of series with respect to an unknown function and their derivatives up to the third order is proved. Further, in the space of continuously differentiable functions, the solution of the original initial boundary value problem is obtained and substantiated.

***Key words:** pseudoparabolic equation, boundary value problem, classic solution, Fourier method, small parameter.*

Киришүү. Псевдопараболикалык жана Соболевдик типтеги теңдемелерге көптөгөн эмгектер арналган. Бир өлчөмдүү псевдопараболикалык теңдемелер үчүн ар кандай түз жана тескери маселелер көптөгөн авторлор тарабынан изилденген жана бул багыт боюнча кенири библиографияны [1] табууга болот.

[2] иши псевдопараболикалык типтеги теңдемелерге алып келинүүчү физикалык процесстерди моделдөөгө арналган.

[3], [4] иштеринде эки өлчөмдүү псевдопараболикалык теңдеме үчүн Коши жана биринчи түрдөгү баштапкы-чектик маселелер каралып, тиешелүү оператордун фундаменталдык чыгарылышы жана Гриндин функциясы аркылуу бул маселелердин айкын чыгарылыштары тургузулган.

Бул макалада изилденген негизги суроо эки өлчөмдүү псевдопараболикалык теңдеме үчүн экинчи түрдөгү баштапкы-чектик маселенин чыгарылышын (классикалык мааниде) табуу жана негиздөө маселеси болот.

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Маселенин коюлушу жана алынган жыйынтык. Мейли

$$\Pi_T = \{(x,y,t):(x,y)\in\Pi,\, t\in(0,T]\},\ \Pi = \{(x,y):0<x<l,\,0<y<m\}.$$

Төмөнкү $\bar{\Pi}_T$ областында үзгүлтүксүз болгон экинчи түрдөгү баштапкы-чектик маселенин классикалык чыгарылышын табуу көйгөйүн карап көрөлү:

$$u_t(x,t) - a^2[(u_t+u)_{xx} + (u_t+u)_{yy}] = 0, \quad (x,y)\in\Pi_T; \tag{1}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), (x,y)\in\Pi; \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_x(0,y,t) = u_x(l,y,t) = 0, & 0\le y\le m, 0\le t\le T, \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,m,t) = 0, & 0\le x\le l, 0\le t\le T. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. Эгерде $\varphi(x,y)\in C^2(\overline{\Pi})$, $\varphi'''(x,y)\in L_2(\Pi)$ жана $\varphi_x'(0,y) = \varphi_x'(l,y) = 0$, $\varphi_{xx}(0,y) = \varphi_{xx}(l,y) = 0$, $\varphi_y'(x,0) = \varphi_y'(x,m) = 0$, $\varphi_{yy}(x,0) = \varphi_{yy}(x,m) = 0$ болсо, анда (1)- (3) маселесинин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана төмөнкү катар түрүндө берилет:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{m}y. \tag{4}$$

Далилдөө. Биз (3) чектик шарттарын канааттандыруучу (1) теңдемесинин тривиалдуу эмес чыгарылышын эселүү катар түрүндө издейбиз:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)Y_n(y)T_{kn}(t). \tag{5}$$

(5) деги $u(x,y,t)$ тин маанилерин (1) ге коюп, сол жана оң бөлүктөрдөгү катардын мүчөлөрү бирдей сандар бирдей болсо, анда

$$X_k(x)Y_n(y)T_{kn}'(t) = a^2\left(X_k''(x)Y_n(y) + X_k(x)Y_n''(y)\right)\left(T_{kn}'(t)+T_{kn}(t)\right) = 0$$

барабардыгын алабыз.

Мындан $T_{kn}' + T_{kn} \neq 0$ талап кылып, өзгөрмөлөрдү ажыратып, биз төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{T_{kn}'}{a^2(T_{kn}'+T_{kn})} = \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} + \frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)}. \tag{6}$$

(6) барабардыгынын сол жагы *t* дан , ал эми оң жагы (*x, y*) тен гана көз каранды функциялар болгондуктан, бул барабардыктын сол жана оң бөлүктөрү тең турактуу чоңдукка барабар болгондо гана орун алат.

Демек, ∃ λ_{kn} ушундай сумма

$$T_{kn}' + a^2\lambda_{kn}(T_{kn}'+T_{kn}) = 0, \qquad \frac{X_k''(x)}{X_k(x)} + \frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)} = \lambda_{kn} \tag{7}$$

орун алат.

Бирок бул суммалар бири *x* га, экинчиси *y* га гана көз каранды болгон функциялардын суммасы болгондуктан, бул эки функция тең турактуу болгондо гана турактуу боло алат.

Демек, ∃ μ_k жана v_nтөмөнкү барабардык орун алат:

$$X_k''(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \quad Y_n''(y) + v_n Y_n(y) = 0, \quad \mu_k + v_n = \lambda_{kn}. \tag{8}$$

Ошентип, (1)-(3) маселесин чыгарууну эки Штурма-Лиувилл маселелерин чыгаруу менен баштоо керек –

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

$X_k(x)$ үчүн жана $Y_n(y)$ үчүн.

(3) чектик шарттарынан $X_k(x)$ жана $Y_n(y)$ үчүн

$$X_k^{'}(0) = X_k^{'}(l) = 0, \quad Y_n^{'}(0) = Y_n^{'}(m) = 0.$$

чектик шарттарынын аткарылышы келип чыгат.

Демек, $X_k(x)$ жана $Y_n(y)$ функциялары үчүн төмөнкүдөй Штурма-Лиувиллдин маселелерин алабыз:

$$\begin{cases} X_k^{''}(x) + \mu_k X_k(x) = 0, \\ X_k^{'}(0) = X_k^{'}(l) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_n^{''}(y) + v_k Y_n(m) = 0, \\ Y_n^{'}(0) = Y_n^{'}(m) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

(9) тагы биринчи маселенин өздүк маанилери жана өздүк функциялары төмөнкүдөй болот:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 0,1,2,..., \tag{10}$$

жана $L_2(0, l)$ мейкиндигинде орто нормаланган базисти түзөт. Ал эми экинчи маселе үчүн

$$v_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ Y_n(x) = \sin\frac{n\pi}{m}y, \quad n = 1,2,... . \tag{11}$$

$T_{kn}(t)$ функциялары үчүн $\mu_k + v_n = \lambda_{kn}$ байланыштын жардамы менен биз төмөнкү теңдемеге ээ болобуз:

$$T_{kn}^{'} + a^2\lambda_{kn}(T_{kn}^{'} + T_{kn}) = 0, \quad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{n}\right)^2.$$

$\varphi(x, y)$ функциясын Штурма-Лиувилл маселесинин өздүк функциялары боюнча катарга ажыраталы:

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) \varphi_{kn},$$

мында

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m \varphi(x, y)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{m}ydxdy. \tag{12}$$

Ал эми баштапкы $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ шарты сөзсүз түрдө аткарыла тургандыктан, эгерде $T_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, анда $T_{kn}(t)$ функциялары үчүн биз Коши маселесине ээ болобуз:

$$\begin{cases} T_{kn}^{'} + a^2\lambda_{kn}(T_{kn}^{'} + T_{kn}) = 0, \\ T_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \tag{13}$$

Ар бир λ_{kn} үчүн (13) төн

$$T_{kn}(t) = C\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1 + a^2\lambda_{kn}}t\right)$$

функциясын табабыз, мында C – каалагандай туралтуу сан (произвольная).

Акыркы алынган $T_{kn}(t)$ функциясына баштапкы $T_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ шартын колдонуп $C = \varphi_{kn}$ га ээ болобуз, мындан

$$T_{kn}(t) = \varphi_{kn}\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1 + a^2\lambda_{kn}}t\right)$$

чыгарылышын алабыз.

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Табылган $T_{kn}(t)$ функциясын (4) формуласына коюп төмөнкү формалдуу чыгарылышты алабыз:

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{m}y \quad . \qquad (14)$$

(14) формуласы менен аныкталган функция (1) теңдемесин жана (3) чектик шарттарын канааттандырарын оңой эле көрсөтүүгө болот.

Эми биз (14) формуласы менен аныкталган φ_{kn} коэффициенттери бар катар (1)-(3) маселесинин бардык шарттарын канааттандырарын далилдейбиз.

(14) катары бир калыпта жыйналыш үчүн $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{kn}|$ мажоранттык катарынын жыйналышы жетиштүү жана бул $\varphi(x,y)$ баштапкы функциядан көз каранды.

Эгерде $\varphi(x,y)\in C^1(\Pi)$, $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=0$, $\varphi(x,0)=\varphi(x,m)=0$ шарттары, анда (12)ни бөлүктөп интегралдап төмөнкүнү алабыз:

$$\varphi_{kn}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m\varphi(\xi,\eta)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\cos\frac{n\pi}{m}d\xi\, d\eta=$$

$$=\frac{4}{kn\pi^2}\int_0^l\int_0^m\varphi_{\xi\eta}(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{m}d\xi\, d\eta=\frac{4}{kn\pi^2}\varphi_{kn}',$$

мында $$\varphi_{kn}'=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m\varphi_{\xi\eta}(\eta,\eta)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{m}\eta d\xi d\eta \quad .$$

Бирок $sin\frac{k\pi}{l}x$ - $L_2(0,l)$ мейкиндигинде ортогоналдуу система болгондуктан жана $\int_0^l\sin^2\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{l}{2}$ эске алып, Бесселдин барабарсыздыгы боюнча

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{kn}'\right|^2\le\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m\left|\varphi_{xy}(x,y)\right|^2dxdy<\infty \quad .$$

Демек, Коши-Буняковский барабарсыздыгынан биз алабыз:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{kn}|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{4}{kn\pi^2}\varphi_{kn}'\right|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{k\pi}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{m\pi}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{kn}'\right|^2\right)^{1/2}<\infty \quad .$$

Ошентип, $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{kn}|$ катары жыйналат. Анда

$$|u(x,y,t)|\le\frac{2}{\sqrt{lm}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{kn}|\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t_0\right)\le const\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{kn}|e^{-\varepsilon_{kn}t_0} \quad ,$$

катары дагы жыйналат, мында $\varepsilon_{kn}=\dfrac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}$.

Мындан Вейерштрасстын теоремасы боюнча (11) функционалдык катары $\overline{\Pi}$ областында $\forall t>0$ үчүн x,y боюнча үзгүлтүксүз функцияга бир калыпта жыйналат, андан өз кезегинде (11) функциясы (3) чектик шарттарын жана (2) баштапкы шарттын канааттандырат деген жыйынтыкка келебиз.

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Төмөнкү катарлар

$$u_t(x,y,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}\varphi_{kn}\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{m}y,$$

$$\Delta u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2\right)\varphi_{kn}\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{m}y,$$

$$\Delta u_t(x,y,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2\right)\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}\phi_{kn}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{m}y$$

бир калыпта жыйналыш үчүн тиешелүү мажоранттуу катар $\sum_{k=1}^{\infty}k^2|\varphi_k|$ жыйналыш керек. $\varphi(x,y)$ функциясына коюлган шарттарды эске алып жана (12)ни бөлүктөп эки жолу интегралдасак

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m\varphi(\xi,\eta)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\cos\frac{n\pi}{m}d\xi\,d\eta = \frac{4}{lm}\left(\frac{l^3}{(\pi k)^3}+\frac{m^3}{(\pi n)^3}\right)\times$$

$$\times\int_0^l\int_0^m\left(\varphi_\xi'''+\varphi_\eta'''\right)(\xi,\eta)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\cos\frac{n\pi}{m}d\xi\,d\eta = \left(\frac{l^3}{(\pi k)^3}+\frac{m^3}{(\pi n)^3}\right)\left(\varphi_k'''+\varphi_n'''\right) \qquad (14)$$

алабыз, мында

$$\varphi_k''' = \frac{4}{lm}\frac{l^3}{(\pi k)^3}\int_0^l\int_0^m\varphi_\xi'''(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{m}d\xi\,d\eta,$$

$$\varphi_n''' = \frac{4}{lm}\frac{m^3}{(\pi n)^3}\int_0^l\int_0^m\varphi_\eta'''(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{m}d\xi\,d\eta.$$

Ал эми $sin\frac{k\pi}{l}x$ - $L_2(0,l)$ мейкиндигинде ортогоналдуу система болгондуктан жана $\int_0^l\sin^2\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{l}{2}$ эске алсак, анда Бесселдин барабарсыздыгы боюнча

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k'''\right|^2 \le \frac{2}{l}\int_0^l\left|\varphi_\xi'''(x,y)\right|^2dx<\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_n'''\right|^2 \le \frac{2}{m}\int_0^m\left|\varphi_\eta'''(x,y)\right|^2dy<\infty$$ ны

алабыз, б.а. $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\varphi_k'''\right|^2+\left|\varphi_n'''\right|^2\right)$ катары жыйналат. Анда (14) тү жана Коши-Буняковский барабарсыздыгын эске алып

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|\varphi_k| = \sum_{k=1}^{\infty}k^2\left|\frac{l^3}{\pi^3k^3}\varphi_k'''\right| \le \frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\varphi_k'''\right| < \frac{l^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k'''\right|^2\right)<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|\varphi_k| = \sum_{k=1}^{\infty}k^2\left|\frac{l^3}{\pi^3k^3}\varphi_k'''\right| \le \frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\varphi_k'''\right| < \frac{l^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k'''\right|^2\right)<\infty$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз,

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

б.а. $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(k^2+n^2\right)\left(\left|\varphi_k'''\right|^2+\left|\varphi_n'''\right|^2\right)$ катары жыйналат.

Мындан, функционалдык катарлардын бир калыпта жыйналуу критерийи боюнча төмөнкү катарлар абсолюттук жана бир калыпта жыйналат:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial t},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^3 u_\kappa}{\partial x^2 \partial t}.$$

Теорема далилденди.

Адабияттар:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек. - Илим. - 2001. - 181 с.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. - 1960. - Т. 24, №5. - С. 852-864.
3. Аблабеков Б.С. Фундаментальное решение задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде. // Известия КГТУ им. И. Раззакова, № 9, Бишкек 2009. - С. 98-101.
4. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. О разрешимости смешанных задач для двумерного псевдопараболического уравнения // Приволжский научный вестник. 2016. №10(62). С. 5-9.
5. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа [Текст] /А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. - М.: Физматлит, 2007. - 736 с.
6. Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А. Вторая начально-краевая задача для уравнения Буссинеска-Лява. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2021. №. 3. С. 8-17
7. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Явное решение задачи коши для двумерного псевдопараболического уравнения. / Известия ВУЗов Кыргызстана. 2015. №. 10. С. 3-7.
8. Аблабеков Б.С., Муканбетова А.Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром. / Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. №. 3. С. 41-47