DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 1, 2022

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б., Докторбаева А.Д.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ПСЕВДО-ПАРАБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ

Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б., Докторбаева А.Д.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

B. Ablabekov, A. Baiserkeeva, A. Doktorbaeva

INVERSE PROBLEMS OF SOURCE DETERMINATION FOR A TWO-DIMENSIONAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION

УДК: 517.946

Бул иште мейкиндиктеги өзгөрмөлөрдүн бирине көз каранды болбогон булак функциясын аныктоо тескери маселеси каралат. Кошумча шарт изделүүчү функция көз каранды болбогон өзгөрмөгө ортогоналдуу тегиздикте берилет. Алдын ала аныктоо шартын колдонуу менен тескери маселе сызыктуу жүктөлгөн псевдопараболикалык теңдеме үчүн түз маселеге келтирилет. Андан ары экинчи даражадагы кадимки дифференциалдык теңдеменин чектик маселеси үчүн Грин функциясын колдонуу менен, тескери маселени Фредгольм-Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине келтирилет, андан кийин удаалаштыкты жакындаштыруу ыкмасы жана кысып чагылтуу принцибин колдонуп каралып жаткан тескери маселенин чыгарылышынын бар экендиги жана жалгыздыгы далилденген. Тескери маселенин чечилиши Вольтеррдин оператордук теңдемелер ыкмасы аркылуу изилденет. Чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремасы жылмакай чектелген жана үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялардын класстарында далилденген.

***Негизги сөздөр**: псевдопараболалык тендеме, тескери маселе, чыгарылыштын жашашы, жалгыздыгы, интегралдык теңдеме.*

В работе рассматривается обратная задача идентификации функции источника, которые не зависят от одной из пространственных переменных. Дополнительное условие задается на плоскости, ортогональной той переменной, от которой искомая функция не зависит. Используя условия переопределения, обратная задача сводится к прямой задаче для линейного нагруженного псевдопараболического уравнение. Далее с помощью функции Грина для краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, обратная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма-Вольтерра второго рода. Затем с применением метода последовательных приближений и приципа сжатых отображений доказывается существование и единственность решений рассматриваемой обратной задачи. Разрешимость обратной задачи исследуется с помощью метода операторных уравнений Вольтерра. Теоремы существования и единственности решения доказана в классах гладких ограниченных и непрерывно дифференцируемых функций.

***Ключевые слова:** псевдопараболическое уравнение, обратная задача, разрешимость, единственность, интегральное уравнение.*

The paper considers the inverse problem of identifying source functions that do not depend on one of the spatial variables. An additional condition is specified on a plane orthogonal to the variable on which the required function does not depend. Using the definition of reversal, the inverse task is reduced to a direct task for linearly loaded pseudoparabolic equation. Further, using the Green's function for the boundary value problem of an ordinary differential equation of the second order, the inverse problem is reduced to an integral Fredholm-Volterra equation of the second kind. Then, using the method of successive approximations and the principle of compressed mappings, the existence and uniqueness of solutions of the considered inverse problem are proved. The resolution of the inverse problems is studied with the help of the method of operator equations of Voltaire. Theorems of existence and uniformity of solutions are proved in classes of smooth bounded and indistinguishable function.

***Key words:** pseudoparabolic equation, inverse problem, solvability, uniqueness, integral equation.*

Киришүү. Дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселелер деп, адатта, түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кандайдыр бир кошумча маалыматтар (кайра аныктоо) боюнча дифференциалдык теңдемелердин коэффициенттерин, оң жактарын, ошондой эле баштапкы же чектик шарттарын жана чыгарылышын аныктоо маселелери аталат.

Сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселе сызыктуу деп аталат, эгерде бош мүчө, ошондой эле баштапкы же чектик шарттар изделсе.

Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн тескери маселе коэффициенттик тескери маселе деп аталат, эгерде теңдемедеги бир же бир нече коэффициенттер изделсе. Коэффиценттик тескери маселе көп өлчөмдүү деп аталат, эгерде изделүүчү коэффициент $n \geq 2$ өзгөрмөлөрдөн көз каранды болсо, тескери учурунда коэффиценттик тескери маселе бир өлчөмдүү деп аталат [1].

Белгилүү болгондой, жаракалуу-тешиктүү чөйрөлөрдөгү суюктуктарды фильтрациялоонун, гетерогендик чөйрөдө жылуулук берүүнүн, топурактагы ным берүүнүн көптөгөн маселелери үчүнчү даражадагы псевдопараболикалык теңдемелер үчүн баштапкы, баштапкы чектик (түз) жана тескери маселелерди изилдөөгө алып келет [2-3].

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Псевдолпараболалык тендемелер үчүн түз жана тескери маселелерге көптөгөн илимий эмгектер арналган. Кененирээк маалыматтарды [1, 4, 5] эмгектеринен карасак болот.

1. Маселенин коюлушу жана жаплынган жыйынтыктар.

Белгилөө киргизели: $D = \{ (x,z) |\ x \in (0,l), z \in \mathbb{R}\}$, $D_T = D \times (0,T]$, $Q_T = \{ (z,t) |\ z \in \mathbb{R},\quad 0 < t \le T\}$.

D_T областында төмөнкү баштапкы-чектик маселесин карайлы:

$$u_t = (u_t + u)_{xx} + (u_t + u)_{zz} + f(x,t)h(x,z,t), (x,z,t) \in D_T, \tag{1}$$

$$u(x,z,0) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$u(0,z,t) = \varphi_1(z,t), \qquad u_x(l,z,t) = \varphi_2(z,t), \qquad (z,t) \in \overline{Q}_T. \tag{3}$$

Мында $u_0(x,z), h(x,z,t)$, $\varphi_i(z,t), i = 1,2$ - чыныгы берилген функциялар.

Тескери маселе. (1)-(3) шарттарынан $\{u(x,z,t),\ f(x,t)\}$ экилдик функцияларды табуу талап кылынсын, эгерде ал төмөнкү кошумча шартын канааттандырса

$$u(x,0,t) = \psi(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Ц}_T \tag{4}$$

Биз макулдашуу шарттарын канааттандырылды деп эсептейли:

$$u_0(0,z) = \varphi_1(z,0), \quad u_{0x}(l,z) = \varphi_2(z,0), \quad u_0(x,0) = \psi(x,0),$$
$$\varphi_1(0,t) = \psi(0,t), \quad \varphi_2(0,t) = \psi_x(0,t). \tag{5}$$

Теорема. Мейли $\varphi_j(z,t) \in C(\overline{Q}_T), \quad j = 1,2,\ u_0(x,z) \in C^2(\overline{D})$ функциялары тиешелүүлүгүнө жараша Q_T жана $\overline{D}$ областарында экинчи тартиптеги бардык туундулар менен абсолюттук интегралдануучу функциялар болсун, ал эми $u_0(x,z)$, $\varphi_1(z,t)$, $\varphi_2(z,t)$, $\psi(x,t)$ функциялары үчүн (5) макулдашуу шарттары аткарылсын, мындан тышкары $\psi \in C^{(2,1)}(\bar{Ц}_T)$, $h(x,z,t) \in C^{(2,1,1)}(\bar{D}_T)$ $h(x,0,t) \neq 0$,$(x,t) \in \bar{Ц}_T$. Анда (1)-(4) тескери маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз.

Далилдөө. Теореманы далилдөө үчүн адегенде (1)-(4) маселени кандайдыр бир жардамчы маселеге алып келебиз.

(1) ге $z = 0$ду коюп, (4) шартын эске алып, биз алабыз

$$\psi_t(x,t) = (\psi_t(x,t) + \psi(x,t))_{xx} + (u_t + u)_{zz}(x,0,t) + f(x,t)h(x,0,t). \tag{6}$$

(6) дан табабыз

$$f(x,t) = a_1(x,t) + a_2(x,t)(u_t + u)_{zz}(x,0,t), \tag{7}$$

мында

$$a_1(x,t) = (\psi_t - (\psi_t + \psi)_{xx})/h(x,0,t),\ \ a_2(x,t) = -\frac{1}{h(x,0,t)}$$

- белгилүү функциялар.

$a_1(x,t)$, $\quad a_2(x,t)$ функцияларынын туюнтмаларын эске алып, төмөнкү маселеге келебиз:

$$u_t = (u_t + u)_{xx} + (u_t + u)_{zz} + a_1(x,t)h(x,z,t) + a_2(x,t)(u_t + u)_{zz}(x,0,t)h(x,z,t), \tag{8}$$

$$u(x,z,0) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in \overline{D}, \tag{9}$$

$$u(0,z,t) = \varphi_1(z,t), \quad u_x(l,z,t) = \varphi_2(z,t), \quad (z,t) \in \overline{Q}_T. \tag{10}$$

Ошентип, биз үчүнчү даражадагы жүктөлгөн псевдопараболикалык теңдеме үчүн баштапкы-чектик маселесин алдык.

Экинчи жагынан, z өзгөрмөсүнө карата Фурье өзгөртүүсүн колдонуу менен (8)-(10) маселесинен төмөнкүнү алабыз:

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

$$w_t = (w_t + w)_{xx} - y^2(w_t + w) + a_2(x,t)\tilde{h}(x,y,t)(u_t + u)_{zz}(x,0,t) +$$
$$+ a_1(x,t)\tilde{h}(x,y,t), \qquad (11)$$
$$w(x,y,0) = w_0(x,y), \qquad (12)$$
$$w(0,y,t) = g_1(y,t), \qquad w_x(l,y,t) = g_2(y,t), \qquad (13)$$

мында

$$w(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R u(x,z,t)e^{-izy}dz,$$
$$\tilde{h}(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R h(x,z,t)e^{-izy}dz,$$
$$\tilde{\varphi}_j(y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \varphi_j(z,t)e^{-izy}dz, \quad j = 1,2,$$
$$w_0(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_R u_0(x,z)e^{-izy}dz.$$

(11) теңдемесин $(u_t + u)_{zz}(x,0,t) = -\int_R y^2(w_t + w)(x,y,t)dy,$ катнашын эске алуу менен төмөнкүчө жазып алабыз

$$w_t = (w_t + w)_{xx} - y^2(w_t + w) + p_1(w_t + w)(x,t) + a_2(x,t)\tilde{h}(x,y,t), \qquad (14)$$

мында

$$p_1(w)(x,t) = -a_2(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} y^2 w(x,y,t)dy.$$

Эми биз (14), (12), (13) маселесин изилдейбиз.

Ал үчүн биз жаңы белгисиз $w_t + w = V$ функциясын киргизебиз.

Анда $V(x,y,t)$ функкциясы төмөнкү шарттарды канааттандырат

$$-V_{xx} + (1+y^2)V = \int_0^t e^{-(t-\tau)}V(x,y,\tau)d\tau + p_1(V)(x,t) +$$
$$+ a_2(x,t)\tilde{h}(x,y,t) + e^{-t}w_0(x,y), \qquad (15)$$
$$V(0,y,t) = \tilde{\varphi}_1(y,t), \quad V_x(l,y,t) = \tilde{\varphi}_2(y,t), \qquad (16)$$

мында

$$\tilde{\varphi}_1(y,t) = \varphi_{1t} + \varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_{2t} + \varphi_2$$

(15) теңдемесиндеги $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+y^2)$ операторунунун тескери операторун табуу менен

$$V(x,y,t) = C_1(y,t)e^{\sqrt{1+y^2}x} + C_2(y,t)e^{-\sqrt{1+y^2}x} + \int_0^x \frac{sh(\sqrt{1+y^2}(x-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}F_1(\xi,t)d\xi, \qquad (17)$$

теңдемесин алабыз, мында

$$F_1(x,t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}V(x,y,\tau)d\tau + p_1(V)(x,t) + a_2(x,t)\tilde{h}(x,y,t) + e^{-t}w_0(x,y). \qquad (18)$$

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

C_1 жана C_2 ларды (16) чектик шарттары аткарылыш үчүн тандайбыз, б.а.

$$\tilde{C}_1(y,t)+\tilde{C}_2(y,t)=\tilde{\varphi}_1,$$

$$\tilde{C}_1(y,t)e^{\sqrt{1+y^2}l}-C_2(y,t)e^{-\sqrt{1+y^2}l}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\tilde{\varphi}_2-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\int_0^l ch\sqrt{1+y^2}(l-\xi)F_1(\xi,t)d\xi.$$

Акыркы системаны $C_1(y,t)$ жана $C_2(y,t)$ функцияларына карата чечип, табабыз

$$C_1(y,t)=\frac{1}{2ch\left(\sqrt{1+y^2l}\right)}\left[\tilde{\varphi}_1(y,t)e^{-\sqrt{1+y^2}l}-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\tilde{\varphi}_2(y,t)+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\int_0^l ch\left(\sqrt{1+y^2}(l-\xi)\right)F_1(\xi,t)d\xi\right],$$

$$C_2(y,t)=\frac{1}{2ch\left(\sqrt{1+y^2l}\right)}\left[\tilde{\varphi}_1(y,t)e^{\sqrt{1+y^2}l}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\tilde{\varphi}_2(y,t)-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\int_0^l ch\left(\sqrt{1+y^2}(l-\xi)\right)F_1(\xi,t)d\xi\right].$$

Табылган $C_1(y,t)$, $C_2(y,t)$ ди (17) ге коюп, биз төмөнкүгө ээ болобуз:

$$V(x,y,t)=-2\tilde{\varphi}_1\frac{sh\sqrt{1+y^2}(l-x)}{ch\sqrt{1+y^2}l}+\frac{2\tilde{\varphi}_2 sh(\sqrt{1+y^2}x}{\sqrt{1+y^2}ch\sqrt{1+y^2}l}+$$

$$-\frac{ch\sqrt{1+y^2}x}{ch\sqrt{1+y^2}l}\int_0^l\frac{ch(\sqrt{1+y^2}(l-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}F_1(\xi,t)d\xi+\int_0^x\frac{sh(\sqrt{1+y^2}(x-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}F_1(\xi,t)d\xi,$$

же (18) эске алып, акыркы теңдемени төмөнкүчө жазабыз:

$$V(x,y,t)=\int_0^t\int_0^l K_1(x,\xi,t,\tau,y)V(\xi,y,\tau)d\xi d\tau+\int_0^l K_2(x,\xi,y)p_1(V)(\xi,t)d\xi d\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^x K_3(x,\xi,y)V(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^x K_4(x,\xi,y)p_1(V)(\xi,t)d\xi+\tilde{F}(x,y,t), \qquad (19)$$

мында

$$K_1(x,\xi,t,\tau,y)=-\frac{ch\sqrt{1+y^2}x}{ch\sqrt{1+y^2}l}\frac{ch(\sqrt{1+y^2}(l-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}e^{-(t-\tau)},$$

$$K_2(x,\xi,t,\tau,y)=-\frac{ch\sqrt{1+y^2}x}{ch\sqrt{1+y^2}l}\frac{ch(\sqrt{1+y^2}(l-\xi))}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$K_3(x,\xi,t,y)=\frac{sh(\sqrt{1+y^2}(x-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}e^{-(t-\tau)},$$

$$K_4(x,\xi,y)=\frac{sh(\sqrt{1+y^2}(x-\xi))}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\tilde{F}(x,y,t)=-2\tilde{\varphi}_1\frac{sh\sqrt{1+y^2}(l-x)}{ch\sqrt{1+y^2}l}+\frac{2\tilde{\varphi}_2 sh(\sqrt{1+y^2}x}{\sqrt{1+y^2}ch\sqrt{1+y^2}l}+$$

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

$$+\frac{ch\sqrt{1+y^2}x}{ch\sqrt{1+y^2}l}\int_0^l \frac{ch(\sqrt{1+y^2}(l-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}\Big[a_2(\xi,t)\tilde{h}(\xi,y,t)+e^{-t}w_0(\xi,y)\Big]d\xi+$$

$$+\int_0^x \frac{sh(\sqrt{1+y^2}(x-\xi))}{\sqrt{1+y^2}}\Big[a_2(\xi,t)\tilde{h}(\xi,y,t)+e^{-t}w_0(\xi,y)\Big]d\xi$$

Ошентип, биз экинчи түрдөгү (19) интегралдык теңдемесин алдык. Мындан t үчүн, кысып чагылтуу принциби орун алат. Бул теңдемеге удаалаштыкты жакындаштыруу ыкмасын колдонуп, чыгарылыштын жашашын далилдөөгө болот ([6). Демек, Банах теоремасынан ал чыгарылышка умтулгандыгы келип чыгат), анда биз тиешелүү түрдө $V(x,y,t)$ ти жана $u(x,y,t)$ ти табабыз.

$\varphi_j(z,t),\quad j=1{,}2$ жана $u_0(x,z)$ функцияларына коюлган талаптардан $\varphi_j(z,t),\quad j=1{,}2$ жана $w_0(x,z)$ функцияларынын z боюнча $\mathbb{R}$ де каалагандай $t\in[0,T]$ жана $x\in[0,l]$ тер үчүн чектелген жана үзгүлтүксүз функциялар экендиги келип чыгат. Анда $w(x,y,t)$ функциясы каалагандай $t\in[0,T]$ жана $x\in[0,l]$ тер үчүн z боюнча $\mathbb{R}$ де чектелген жана үзгүлтүксүз функциялар экендиги келип чыгат. Демек, өздүк эмес интегралы жашайт. Теорема 1 далилденди.

Эскертүү. (1)-(4) тескери маселесинин чыгарылышынын туруктуулугун жеңил эле далилдесе болот.

Адабияттар:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П.Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. - 1960. - Т. 24, №5. - С. 852-864.
3. Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах //ДАН СССР, 1975. Т. 220. №3. С. 540-543.
4. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Локальная разрешимость многомерной обратной задачи для псевдопараболического уравнения // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2017. № 7. С. 3-9.
5. Asanov, A., Atamanov E.R. Nonclassical and invers problems for pseudo-parabolic equations. -Tokyo, 1997. - 152 p.
6. Васильева А.Б.,Тихонов Н.А. Интегральные уравнения.- 2-е изд.-М.:Физматлит, 2002.-160 с
7. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Явное решение задачи коши для двумерного псевдопараболического уравнения. / Известия ВУЗов Кыргызстана. 2015. №. 10. С. 3-7.