

Байджуранова А.М.

 μ -ПРЕДКОМПАКТУУ БИР КАЛЫПТУУ СТРУКТУРАЛАР ЖӨНҮНДӨ

Байджуранова А.М.

О μ -ПРЕДКОМПАКТНЫХ РАВНОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

A. Baidzhuranova

ABOUT μ -PRECOMPACT UNIFORM STRUCTURES

УДК: 515.12

Бул илимий макалада μ -предкомпактуу бир калыптуу структуралар изилденет. Тактап айтканда, универсалдуу бир калыптуу структуралардын касиеттерин колдонуу менен μ -компактуу мейкиндиктердин мүнөздөмөлөрү жана Тихонов мейкиндиктеринин компакттуулук индекси, μ -компактка чейинки μ -предкомпактуу чагылдыруулардын прообразын сактагышы белгиленген. Бир калыптуу (X, U) мейкиндиги предкомпактуу деп аталат, эгерде бир калыптуулук U чектүү жабдуулардан турган базага ээ болсо. Бир калыптуу (X, U) мейкиндиги μ -чектелген деп аталат, эгерде бир калыптуулук U кардиналдуу $\leq \mu$ жабдуулардан турган базага ээ болсо. Бир калыптуу (X, U) мейкиндиги пред-Линделёфдук деп аталат, эгерде бир калыптуулук U санактуу жабдуулардан турган базага ээ болсо. Бир калыптуу (X, U) мейкиндиги μ -предкомпактуу деп аталат, эгерде ар бир бир калыптуу жабдуу бир калыптуу жабдуунун кардиналы $\leq \mu$ ичтен сызылса. Бир калыптуу (X, U) мейкиндиги санактуу предкомпактуу деп аталат, эгерде ар бир санактуу бир калыптуу жабдуу чектүү бир калыптуу жабдууга ичтен сызылса. X Тихоновдук мейкиндик μ -компактуу деп аталат, эгерде анын ар бир ачык кардиналдуу $\leq \mu$ жабдуусу чектүү ачык жабдууга ичтен сызылса. X Тихоновдук мейкиндигинин компакттуулуктун индекси $\leq \mu$ деп аталат, эгерде анын ар бир ачык жабдуусу ачык кардиналдуу $\leq \mu$ жабдуусуна ичтен сызылса.

Негизги сөздөр: μ -компактуулук, μ -предкомпактуу бир калыптуу мейкиндик, Тихонов мейкиндиги, U_X - универсалдуу бир калыптуу структура, чагылдыруу.

В настоящей статье исследуются μ -предкомпактные равномерные структуры. В частности, устанавливаются характеристики μ -компактных пространств и индекс компактности тихоновских пространств, при помощи свойств универсальных равномерных структур, сохранение μ -предкомпактности в сторону прообраза при μ -предкомпактных отображениях. Равномерное пространство (X, U) называется предкомпактным, если равномерность U имеет базу, состоящую из конечных покрытий. Равномерное пространство (X, U) называется μ -ограниченным, если равномерность U имеет базу, состоящую из покрытий мощности $\leq \mu$. Равномерное пространство (X, U) называется пред-Линделёфовым, если равномерность U имеет базу, состоящую из счетных покрытий. Равномерное пространство (X, U) называется μ -предкомпактным, если в каждое равномерное покрытие можно вписать равномерное покрытие мощности $\leq \mu$. Равномерное пространство (X, U) называется счетно предкомпактным, если в каждое счетное равномерное покрытие можно вписать конечное равномерное покрытие. Тихоновское пространство X называется μ -компактным, если в каждое его открытое покрытие мощности $\leq \mu$ можно вписать конечное открытое покрытие. Индекс компактности тихоновского пространства

$X \leq \mu$, если в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие мощности $\leq \mu$.

Ключевые слова: μ -компактность, μ -предкомпактное равномерное пространство, Тихоновское пространство, U_X - универсальная равномерная структура, отображение.

In this paper, we study μ -precompact uniform structures. In particular, the characteristics of μ -compact spaces and the compactness index of Tychonoff spaces are established, using the properties of universal uniform structures, the preservation of μ -precompactness towards the preimage under μ -precompact mappings. A uniform space (X, U) is called precompact if the uniformity U has a base consisting of finite covers. A uniform space (X, U) is called μ -bounded if the uniformity U has a base consisting of coverings of cardinality $\leq \mu$. A uniform space (X, U) is called pre-Lindelöf if the uniformity U has a base consisting of countable covers. A uniform space (X, U) is called μ -precompact if every uniform cover can be refinement a uniform cover of cardinality $\leq \mu$. A uniform space (X, U) is called countably precompact if every countable uniform cover can be refinement a finite uniform cover. A Tychonoff space X is called μ -compact if each of its open covers of cardinality $\leq \mu$ can be refinement a finite open cover. The compactness index $\leq \mu$ of a Tychonoff space X is if each of its open covers can be refinement an open cover of cardinality $\leq \mu$.

Key words: μ -compactness, μ -precompact uniform space, Tikhonov space, U_X - universal uniform structure, mapping.

Следующее предложение показывает широту μ -предкомпактных равномерных структур.

Предложение 1. Всякое предкомпактное равномерное пространство является μ -предкомпактным.

Доказательство. Пусть (X, U) - предкомпактное равномерное пространство и $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда существует конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ такое, что $\beta > \alpha$. Тогда, (X, U) μ -предкомпактное равномерное пространство.

Следствие 1. Всякое предкомпактное равномерное пространство является счетно предкомпактным.

Следствие 2. Всякое компактное равномерное пространство является счетно предкомпактным.

Предложение 2. Всякое подпространство μ -предкомпактного равномерного пространства μ -предкомпактно.

Доказательство. Пусть (X, U) - μ -предкомпактное равномерное пространство и (M, U_M) - его подпространство. Пусть $\alpha_M \in U_M$ - произвольное равномерное покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда существует

такое равномерное покрытие $\alpha \in U$ мощности $\leq \mu$, что $\alpha \wedge \{M\} = \alpha_M$. Пусть $\beta \in U$ такое конечное равномерное покрытие, что $\beta > \alpha$. Легко видеть, что $\beta_M > \alpha_M$ и $\beta_M \in U_M$ - конечное покрытие. Следовательно, равномерное пространство (X, U) является μ -предкомпактным.

Следствие 3. Всякое подпространство счетно предкомпактного равномерного пространства счетно предкомпактно.

Следующая теорема устанавливает характеристику μ -компактных Тихоновских пространств, при помощи универсальных равномерных структур.

Теорема 1. Тихоновское пространство X является μ -компактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) является μ -предкомпактным, где U_X - универсальная равномерная структура.

Доказательство. Необходимость. Пусть тихоновское пространство X является μ -компактным и $\alpha \in U_X$ - произвольное открытое покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда существует такое конечное открытое покрытие β пространства X , что $\beta > \alpha$. Ясно, что и $\beta \in U_X$. Следовательно, пространство (X, U_X) является μ -предкомпактным.

Достаточность. Пусть равномерное пространство (X, U_X) является μ -предкомпактным, где U_X - универсальная равномерная структура. Докажем, что тихоновское пространство X является μ -компактным. Пусть α - произвольное открытое покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда $\alpha \in U_X$ и в силу μ -предкомпактности пространства (X, U_X) существует такое конечное открытое покрытие $\beta \in U_X$, что $\beta > \alpha$. Следовательно, тихоновское пространство X является μ -компактным.

Следствие 4. Тихоновское пространство X является счетно компактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) является счетно предкомпактным, где U_X - универсальная равномерная структура.

Характеристика индекса компактности $\leq \mu$ тихоновских пространств при помощи универсальных равномерных структур дается в следующей теореме.

Теорема 2. Индекс компактности тихоновского пространства X является $\leq \mu$ тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) является μ -ограниченным, где U_X - универсальная равномерная структура.

Доказательство. Необходимость. Пусть индекс компактности тихоновского пространства X является $\leq \mu$ и $\alpha \in U_X$ - произвольное открытое равномерное покрытие. Тогда существует такое конечное открытое покрытие β пространства X , что $\beta > \alpha$. Очевидно, $\beta \in U_X$. Следовательно, пространство (X, U_X) является μ -ограниченным.

Достаточность. Пусть равномерное простран-

ство (X, U_X) является μ -ограниченным, где U_X - универсальная равномерная структура. Докажем, что индекс компактности тихоновского пространства X является $\leq \mu$. Пусть α - произвольное открытое покрытие. Тогда $\alpha \in U_X$ и в силу μ -ограниченности равномерного пространства (X, U_X) найдется такое открытое покрытие $\beta \in U_X$ мощности $\leq \mu$, что $\beta > \alpha$. Следовательно, индекс компактности тихоновского пространства X является $\leq \mu$.

Следствие 5. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) является пред-Линделёфовым, где U_X - универсальная равномерная структура.

В следующей теореме устанавливается характеристика компактных тихоновских пространств посредством универсальных равномерных структур.

Теорема 3. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) является μ -предкомпактным и μ -ограниченным, где U_X - универсальная равномерная структура.

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

Следующая теорема устанавливает характеристику предкомпактных равномерных структур.

Теорема 4. Равномерное пространство (X, U) является предкомпактным тогда и только тогда, когда пространство (X, U) является μ -ограниченным и μ -предкомпактным.

Доказательство. Необходимость. Пусть (X, U) - предкомпактное равномерное пространство. Ясно, что (X, U) μ -ограниченное пространство. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда существует такое конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ которое вписано в равномерное покрытие α . Следовательно, (X, U) является μ -предкомпактным пространством.

Достаточность. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда в силу μ -ограниченности пространства (X, U) существует такое равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \mu$, что $\beta > \alpha$. В свою очередь для покрытия $\beta \in U$, в силу μ -предкомпактности пространства (X, U) существует такое конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$, вписанное в β . Ясно, что $\gamma > \alpha$. Следовательно, (X, U) предкомпактно.

Следствие 6. Равномерное пространство (X, U) является предкомпактным тогда и только тогда, когда пространство (X, U) является пред-Линделёфовым и счетно предкомпактным.

Следствие 7. Пусть (X, U) - полное равномерное пространство. Равномерное пространство (X, U) является компактным тогда и только тогда, когда пространство (X, U) является пред-Линделёфовым и счетно предкомпактным.

Пусть $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) .

Отображение f называется μ -предкомпактным, если для любого равномерного покрытия $\alpha \in U$ мощности $\leq \mu$, существуют такие конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$ и равномерное покрытие $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$.

Отображение f называется счетно предкомпактным, если для любого счетного равномерного покрытия $\alpha \in U$, существуют такие конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$ и равномерное покрытие $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$.

Отображение f называется μ -ограниченным, если для любого равномерного покрытия $\alpha \in U$ существуют такие равномерное покрытие $\gamma \in U$ мощности $\leq \mu$ и равномерное покрытие $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$ [1].

Отображение f называется предкомпактным, если для любого равномерного покрытия $\alpha \in U$ существуют такие конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$ и равномерное покрытие $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$ [1].

Следующее предложение показывает широту счетно предкомпактного отображения.

Предложение 3. Всякое предкомпактное отображение является μ -предкомпактным отображением.

Доказательство. Пусть отображение $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) является μ -предкомпактным и $\alpha \in U$ – произвольное равномерное покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда в силу предкомпактности отображения f существуют такие конечное равномерное покрытие $\gamma \in U$ и равномерное покрытие $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$. Значит, отображение f μ -предкомпактное.

Следствие 8. Всякое предкомпактное отображение является счетно предкомпактным отображением.

Следствие 9. Всякое равномерно совершенное отображение является счетно предкомпактным отображением.

Теорема 5. Пусть $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) . Если f и (Y, V) μ -предкомпактны, то и (X, U) μ -предкомпактно.

Доказательство. Необходимость.

Пусть отображение $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ и про-

странство (Y, V) μ -предкомпактны. Пусть $\alpha \in U$ – произвольное равномерное покрытие мощности $\leq \mu$. Тогда существуют такие конечные равномерное покрытия $\gamma \in U$ и $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$. Следовательно, (X, U) μ -предкомпактно.

Теорема 6. Пусть $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) . Отображение f является предкомпактным в том и только в том случае, если оно является μ -ограниченным и μ -предкомпактным.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) является предкомпактным. Тогда легко видеть, что оно является μ -ограниченным и μ -предкомпактным.

Достаточность. Пусть отображение f является μ -ограниченным и μ -предкомпактным и $\alpha \in U$ – произвольное равномерное покрытие. Тогда в силу μ -ограниченности отображения f существуют такие равномерное покрытие $\gamma \in U$ мощности $\leq \mu$ и равномерное покрытие $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$. Далее для покрытия $\gamma \in U$ существуют такие конечное равномерное покрытие $\gamma_0 \in U$ и равномерное покрытие $\beta_0 \in V$, что $f^{-1}\beta_0 \wedge \gamma_0 > \gamma$. Тогда $(f^{-1}\beta_0 \wedge f^{-1}\beta) \wedge \gamma_0 > f^{-1}\beta \wedge \gamma > \alpha$. Положим $f^{-1}\beta_0 \wedge f^{-1}\beta = f^{-1}(\beta_0 \wedge \beta)$ и $\beta_0 \wedge \beta = \lambda$. Ясно, что $\beta_0 \wedge \beta \in V$ и $f^{-1}\lambda \wedge \gamma_0 > \alpha$. Следовательно, f предкомпактное отображение.

Следствие 10. Пусть $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$ – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) . Отображение f является предкомпактным в том и только в том случае, если оно является пред-Линделёфовым и счетно предкомпактным.

Следствие 11. Равномерное пространство (X, U) является предкомпактным тогда и только тогда, когда пространство (X, U) является пред-Линделёфовым и счетно предкомпактным.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986.
4. Канетов Б., Байджуранова А., Жолдошбек кызы Г. О (сильно) τ -финально паракомпактных и равномерно τ -финально паракомпактных пространствах. Известия вузов Кыргызстана. 2019. № 7. С. 3-7.