DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Ташматов Ч.О., Бокоева М.К.

МАСЕЛЕЛЕРДИ ТҮРДҮҮ ЫКМА МЕНЕН ЧЫГАРУУНУН МИСАЛДАРЫ ЖЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕРГЕ ВЕКТОРДУ КОЛДОНУУ

Ташматов Ч.О., Бокоева М.К.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ ИЛИ ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ch. Tashmatov, M. Bokoeva

EXAMPLES OF SOLVING PROBLEMS IN VARIOUS WAYS OR THE USE OF VECTORS IN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

УДК: 373.167.1:514:372

Бул макала окуучулардын, студенттердин теориялык жана практикалык билимдерин тереңдетүү, кеңейтүү максатын көздөйт. Биринчи маселеде (§19 №12), призманын каптал кырына перпендикуляр болгон кесилиш чиймеде көрсөтүлгөн, бул XOY тегизидисинде жатат |ON| - B чекитинин ординатасы кесилиштин чокуларынын координаталарын жазып алгандан кийин, OA жана OB векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн таап, андан кийин модулун таап, ал OA жана OB векторлоруна түзүлгөн параллелограммдын аянтына барабар болот (аныктама боюнча). Үч бурчтуктун аянты анын жарымына барабар болот. Андан кийин бийиктиги табылат. Экинчи маселеде (§19, №19), чиймеси окуу китебинде көрсөтүлгөн, үч перпендикуляр жөнүндөгү теорема жана фигуранын проекциясынын аянты жөнүндөгү теоремалар колдонулду. §19, №36 болсо, чиймедегидей кылып жайгаштырып алгандан кийин эки вектордун вектордук көбөйтүндүсү колдонулду. §19, №56 да, чиймесин аткаргандан кийин, O чекити үчүн ABc нын медианаларынын кесилишин кабыл алып, эки вектордун вектордук көбөйтүндүсүн колдондук. §21, №16 да үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү колдонулду. Эсептөөнүн башталышы үчүн ромбдун диагоналдарынын кесилиши алынды.

Негизги сөздөр: *кайчылаш, эң кымка аралык, жалпы перпендикуляр, жантык.*

Данная статья направлена на углубление и расширение теоретических и практических знаний учеников и студентов. Пересечение плоскости перпендикулярный к ребрам приемы показано нарисунке, которое лежит в плоскости XOY, |ON| - ордината точки B. Написав координаты вершин треугольника, вычисляем векторное произведение векторов OA и OB, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на этих двух векторах (по определению), а площадь треугольника равна половине площади параллелограмма. Затем находится высота. Во второй задаче (§19, №19), рисунок показан в учебнике, в решение были использованы теоремы о трех перпендикулярах и площади проекта фигуры A в §19 задаче №36 были использованы векторные произведение двух векторов. В задаче §19 №56, после выполнения необходимого рисунка, за начало точки O была взята точка пересечения медиан треугольника ABC. Затем было использовано векторное произведение двух векторов. В задаче § 21 №16 применялось смешанное произведение трех векторов. За начало координат было принято точка пересечения диагоналей ромба.

Ключевые слова: *скрещивающиеся, наименьшее расстояние, общий перпендикуляр, наклонная.*

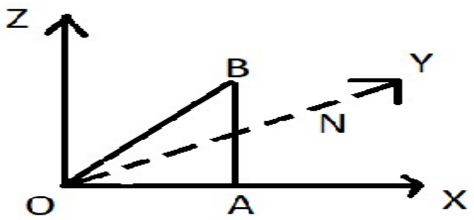
The purpose of the article aims to expand and deepen knowledge in the theory and practice of students. The intersection of the plane perpendicular to the edges of the prism is shown in the figure, which lies in the plane XOY, lO Nl of the ordinates of point B. Having written the coordinates of the vertices of the triangle, we calculate the vector product of the vectors OA and OB, the modulus of which is equal to the area of the parallelogram built on these two vectors (by definition) and the area of the triangle is equal to half the area of the parallelogram, then the height is found. In the second problem (§19 №19), the drawing is shown in the textbook, the solution was used the theorems on three perpendiculars and the projection area of the figure. And in §19 problem №36, the vector product of two vectors was used. In problem §19№56, after completing the required drawing, the point of intersection of the medians of the triangle ABC was taken as the origin of point O. Then the cross product of two vectors was used. Problem §21 №16 used the mixed product of three vectors. The point of intersection of the Rhombus diagonals was taken as the origin of coordinates.

Key words: *interbreeding, shortest distant, common perpendicular, oblique.*

Окуучуларга, студенттерге эсептерди көнүп калган, традициялуу жолдор менен чыгарта берүү кандайдыр бир деңгээлде, алардын математикалык табитин басаңдатат. Андыктан биз, колубуздан келишинче, эсептерди ар түрдүү жолдор менен чыгартууга тынымсыз аракет кылышыбыз керек. Мындай мамиле окуучулардын математикага болгон пикирин, көз карашын өзгөртүп ой-сезимдерин сергитет, ойготот, кызыгууларын арттырат. Ушул максатты көздөп, төмөндө геометрия курсунан бир нече геометриялык маселелердин чыгарылыштарына токтолобуз.

§19 №12 «Үч буртуу жантык призмада каптал кырлары жаткан түз сызыктардын арасындагы аралыктар 37 см ге, 13 см ге жана 40 см ге барабар. Чоң каптал гранынын тегиздиги менен карама-каршы жаткан каптал кырынын арасындагы аралыкты тапкыла».

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557



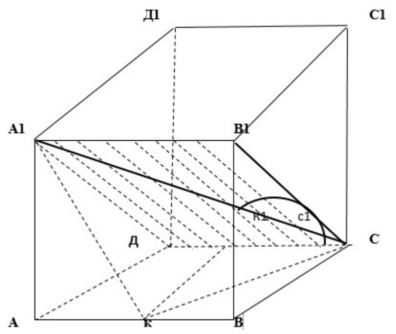
Чыгаруу: Перпендикуляр кесилеште кайда болгон Үч бурчтукту тик бурчтуу координаталар системасына чиймедегидей кылып жайгаштырып алабыз. Анда, O (0; 0; 0;), A (13; 0; 0;), B(0; 37; Sin α; 0), болот. Мында [BN] ⊥ OY,

BOA = α, BON = α - 90°

Косинустар теоремасынан Cos α ны таап алып, анан Sin α ны табабыз.

OA = (13; 0; 0), OB = (0; 37 Sin α; 0). $40^2 = 13^2 + 37^2 + 26 + 37\text{Cos}\,\alpha$,
Cos α = $\frac{62}{26*37} = \frac{31}{481}$, Sin α = $\sqrt{1 - Cos^2\alpha} = \sqrt{1} - \frac{981}{231361} = \frac{480}{481}$;
(OA x OB) = (0; 0; -13 * 37 Sin α); $\sqrt{\ } 481^2\, \text{Sin}^2\,\alpha$; S = $\frac{480}{481} * 481$ = 480.S △ = 240, 240 = $\frac{40*h}{2}$; 480 = 40h, h=12 болот.

§19 №19. «Туура төрт бурчтуу призманын негизинин жагы 15 ке, бийиктиги 20га барабар. Призманын негизинин жагынан аны кесип өтпөгөн диагоналына чейинки эң кыска аралыкты тапкыла (2-сүрөт)».



Чыгаруу: Берилди: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – туура призма. AB = BC = 15, AA_1 = 20.

Табуу керек: BC_1 = ? $BC_1 \perp B_1C$ кылып жүргүзөбүз, анда BC_1 жантыктын өзүнө да перпендикуляр болот, $BC_1 \perp A_1C$.

Векторду колдонуп чыгаргыбыз келсе, A чокусун эсептөөнүн башталышы O катары эсептеп: C (15; 15; 0), B_1(15;0;20), B = (15;0;0) чекиттеринин координаталарын жазып алабыз. Анда, BB_1 = {0; 0; 20}, BC = {0; 15; 0} болот. BB_1 жана BC векторунун вектордук көбөйтүндүсүн карайбыз.

(BB_1 x BC) = (-300; 0; 0) Мунун модулун табабыз: |(BB_1 x BC)| = $\sqrt{(-300^2)}$ = 300 болуп, $S\triangle_{B\,B1\,C} = \frac{300}{2}$ = 150, же 150 = $\frac{B1C*BC1}{2}$, $B_1C = \sqrt{15}^2 + \sqrt{20^2}$ = 25,

же $BC_1 = \frac{300}{25}$ = 12 болот.

Бул маселеде, эгерде биз кайчылаш түздөрдүн жалпы перпендикулярын түзүп алган болсок, биздин учурда A_1C жана AB түздөрү, чиймеде KK_1 жалпы перпендикуляр: (C_1K_1) II (AB) , (K_1K) II (BC_1). Шарт боюнча A_1B_1 = 15,

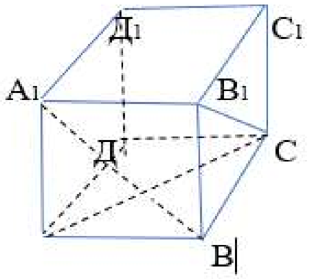
$B_1C = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$, $A_1C = \sqrt{225 * 2 + 20^2} = \sqrt{450 + 400} = \sqrt{850}$
$AC = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$
$A_1B_1^2 = B_1C^2 + A_1C^2 - 2B_1C*A_1C$ COS A_1CB_1 = COS $A_1CB_1 = \frac{25}{\sqrt{850}}$

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Фигуранын проекциясынын аянты:

S_1 = S Cos α, α – тегиздиктердин арасындагы бурч, экендиги белгилүү, мындан S=$\frac{S1}{Cos\alpha}$ болот, тагыраак айтканда, $S_{A1kC} = \frac{S1B1B}{Cos\alpha} = \frac{150*\sqrt{850}}{25} = 6\sqrt{850}\ \frac{\sqrt{850}*KK}{2} = 6\sqrt{850}$, мындан KK_1 = 12 болорун көрөбүз.

§19 №36. «Кубдун кары ага барабар. Кубдун чокусунан анын калган эки чокусун бириктирген диагоналына чейинки аралыкты тапкыла».



A=O

Чыгаруу:

Берилди: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб,

a = AB,

Табуу керек: h ⊥ A_1C

А чокусун эсептөөнүн башталышы катары кабыл алып төмөнкүлөрдү жаза алабыз: B (a; 0; 0), C (a; a; 0), A_1(0; 0; a).

Анда BA_1 = {-a; 0; a}

BC = {0; a; 0}

BA_1 жана BC векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн табабыз:

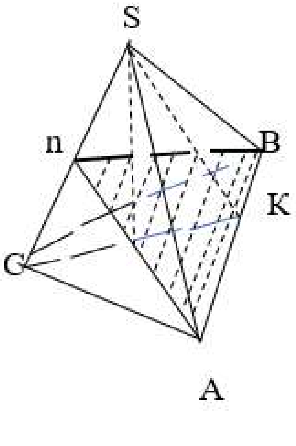
$S\triangle_{BA1C} = \frac{1}{2}$ I(BA_1 x BC)I = {$-a^2$; 0; $-a^2$} болуп:

$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + a^4} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}$ болот.

Экинчиден, (1) $S\triangle = \frac{A1C*h}{2}$, $IA_1CI = \sqrt{a^2 + a^2} + a^2 = a\sqrt{3}$,

(1)= $h = \frac{2S}{IA1CI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ болот.

§19 №56. «Бийиктиги h болгон туура уч бучтуу пирамидада негизинин жагы a аркылуу каршы жаткан каптал кырын тик бурч менен кесип отүүчү тегиздик жүргүзүлгөн. Кесилиштин аянтын тапкыла».



DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

Чыгаруу:

Берилди: SABC туура уч бурчтуу AB = a = BC = AC. Пирамида. SO = h бийиктиги, пирамиданын. KN ⊥ SC

Табуу керек: $S_{кес} = S_{ABN}$

Адегенде: CK = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, OC = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, OK = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, SC = $\sqrt{h2+\frac{a2}{3}}$,

SK=$\sqrt{SB^2}-\sqrt{}Bk^2$= $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}-\sqrt{\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{12h^2-a^2}{12}}$ болорун байкайбыз. Эсептоонун башталышты учун О чекитин алсак: K ($\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 0; 0),

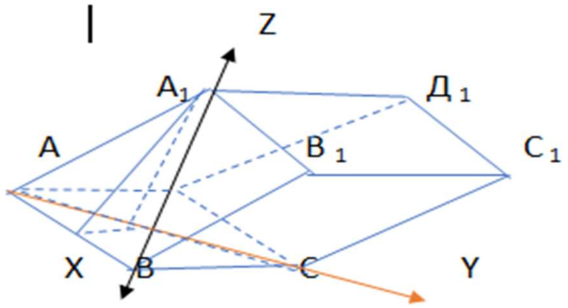
C (-$\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 0; 0), S (0; 0; h) деп жаза алабыз. Анда, KC = {-$\frac{a\sqrt{3}}{3}$-$\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 0; 0} же,

KC = {-$\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 0; 0}, KS = {-$\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 0; h}. Биз ушул векторлордун жардамы менен △SKC нын аянтын таап, ошол аянтты $S\triangle_{SKC}=\frac{SC*KN}{2}$ ге барабарлап, KN ди табабыз, анда кесилиштин аянты $S_{кес}=\frac{AB*KN}{2}=\frac{a*KN}{2}$ болот.

(KC x KS) = {0; $\frac{ah\sqrt{3}}{2}$; 0}, S△=$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2h^2}{4}}=\frac{ah\sqrt{3}}{4}$, S△=$\frac{SC*KN}{2}$, KN=$\frac{2S}{ISCI}$=

=$\frac{ah\sqrt{3}}{2}*\frac{\sqrt{3}}{a^2+3h^2}=\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$ болот.

21 №16. «Параллелепипеддин грандары жагы а жана тар бурчу 60° болгон барабар ромбдор. Параллелепипеддин көлөмүн тапкыла».



Чыгаруу: Ромбдун диагоналдарынын кесилишкен чекити О ну эсептөөнүн башталышын катары эсептеп, чиймедегидей кылып жайгаштырып төмөнкүлөрдү жаза алабыз:

A (0; $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$;0) A, (0; $-\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$) $\overline{AD}=(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$

B ($\frac{a}{2}$; 0; 0) $\overline{AA}=(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

Д (-$\frac{a}{2}$; 0; 0) $\overline{AB}=(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$

Анткени,

Ac=a$\sqrt{3}$, OA=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{An}{An}=cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, Ak=$\frac{a}{\sqrt{3}}$ ok = oa-ak = $\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Аныктама боюнча: параллелепипеддин көлөмү $\overline{AA}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ векторлоруна түзүлгөн параллелепипеддин көлөмүнө барабар.Тагыраак айтканда, ушул векторлордун аралаш көбөйтүндүсүнө барабар болот.

$$V=\begin{vmatrix} 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}*\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Кадимки, традициялуу жол менен чыгарылышы төмөнкүдөй болот:

DOI:10.26104/IVK.2022.45.557

1-чийме! $\widehat{kan}$=30°, $\frac{an}{ak} = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} => Ak = \frac{2an}{\sqrt{3}} = \left\{an = \frac{a}{2}\right\} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ анда,

AA, k: A, k=h=$\sqrt{aa^2, -ak^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \mathrm{a}\sqrt{\frac{2}{3}}$

V пар-д =s *h = $a^2 \sin 60° * a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ болот.

Албетте, кызыккан окутуучу, мугалим бул сыяктуу эсептерди жеңил эле таап алып, аларды балдарына түрдүү жолдор менен чыгартаарына терең ишенебиз.

Адабияттар:

1. Погорелов А.В. «Геометрия 7-11». - М., 1995.
2. Привалов И.И. «Аналитическая геометрия». - М., 1996.
3. Бекбоев Н.Б. «Геометрия 10-11». - Бишкек, 2009.
4. Суворов И.Ф. «Курс высшей математики». - М., 1967.
5. Ляшко И.И., Боярчук А.К. «Справочное пособие по математическому анализу». Часть первая. - Киев, 1978.
6. Ташматов Ч.О., Жороев А. Задача, решение которой требует решения других вопросов. / Известия ВУЗов Кыргызстана. 2017. №.7. С. 8-10.