DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 2, 2023

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Алтыбаев Н.И.

БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН ТОЛУКТУГУ ЖАНА БИР КАЛЫПТУУ ПАРАКОМПАКТУУЛУГУ

Алтыбаев Н.И.

ПОЛНОТА И РАВНОМЕРНАЯ ПАРАКОМПАКТНОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

N. Altybaev

COMPLETENESS AND UNIFORMLY PARACOMPACTNESS OF UNIFORM SPACES

УДК: 515.12

Бир калыптуу мейкиндиктердин жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын теориясында толуктук жана бир калыптуу паракомпактуулук түшүнүктөрү маанилүү бир калыптуу касиеттерден болуп саналат. Ар бир Райстын маанисиндеги бир калыптуу паракомпактуу мейкиндик толук экендиги белгилүү. Каалагандай бир калыптуу μ - паракомпактуу мейкиндик μ - толук болобу ? деген табигый маселе жаралат. Бул иште жогоруда коюлган маселеге оң жооп берилет. Алгач күчтүү μ -толук мейкиндик түшүнүгү киргизилет жана изилденет. Күчтүү μ - толук мейкиндик деп ≤ μ кубаттуулуктагы базага ээ болгон ал мейкиндиктеги ар бир күчсүз Коши фильтринин андагы жыйналуусу аталат. μ - паракомпактуу мейкиндик жана күчтүү μ - толук мейкиндиктердин, μ салмактагы бир калыптуу мейкиндиктердин классындагы μ - толук жана күчтүү μ - толук мейкиндиктердин эквиваленттүүлүгү тургузулат. Күчтүү μ -толук мейкиндиктердин μ - толуктугу көрсөтүлөт. Ошондой эле, Дьедонне боюнча күчтүү μ – толук мейкиндик түшүнүгү киргизилет жана изилденет. Берилген тихоновдук мейкиндиктин Дьедонне боюнча күчтүү μ - толук болуусунун зарыл жана жетиштүү шарты болуп бир калыптуу мейкиндиктин универсалдуу бир калыптуулугуна карата Дьедонне боюнча күчтүү μ -толук болуусу саналат.

Негизги сөздөр: *күчтүү μ - толук мейкиндик, бир калыптуу μ - паракомпактуу мейкиндик, Дьедонне боюнча күчтүү μ - толук мейкиндик, күчсүз Коши фильтри.*

В теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений понятия полнота и равномерная паракомпактность являются важными равномерными свойствами. Известно, что каждое равномерно паракомпактное пространство в смысле Райса является полным. Естественно, возникает задача является ли всякое μ - паракомпактное пространство μ - полными? В настоящей работе дается положительный ответ на выше поставленной задаче. Сначала вводится и исследуется сильно μ - полные пространства. Сильно μ - полными пространствами мы называем те равномерные пространства, в котором всякий слабый фильтр Коши, имеющий базу мощности ≤ μ сходится в нем. Устанавливается эквивалентность свойств μ - паракомпактных пространство и сильно μ - полных пространств, μ - полных и сильноμ - полных пространств в классе равномерных пространств веса μ. Показывается μ - полнота сильноμ - полных пространств. Также, вводятся и исследуются сильно μ - полные по Дьедонне пространства. В частности устанавливается, что данное тихоновское пространство является сильно μ -полным по Дьедонне пространством тогда и только тогда, когда его равномерное пространство с универсальной равномерностью является сильно μ - полным.

Ключевые слова: *сильно μ - полное пространство, равномерно μ - паракомпактное пространство, сильно μ - полное по Дьедонне пространство, слабый фильтр Коши.*

In the theory of uniform spaces and uniformly continuous mappings the concepts of completeness and uniform paracompactness are important uniform properties. It is known that every uniformly paracompact space in the sense of Rice is complete. The problem naturally arises of whether any μ -paracompact space is μ - complete? In this article, we give a positive answer to the above problem. First, strongly μ - complete spaces are introduced and studied. We call strongly μ - complete spaces those uniform spaces in which every weak Cauchy filter having a base of cardinality ≤ μ converges in it. The equivalence of the properties of μ - paracompact spaces and strongly μ -complete spaces, μ - complete and strongly μ - complete spaces in the class of uniform spaces of weight μ is established. The μ - completeness of strongly μ - complete spaces is shown. We also introduce and study Dieudonne strongly μ - complete spaces. In particular, it is established that a Tychonoff space is Dieudonne strongly μ - complete if its uniform space with universal uniformity is strongly μ - complete.

Key words: *strongly μ - complete space, uniformly μ - paracompact space, Dieudonne strongly μ - complete spaces, weakly filter Cauchy.*

Пусть (X,U) равномерное пространство.

Фильтр F в (X,U) называется слабым фильтром Коши, если для любого $\alpha \in U$ найдется такой элемент $A \in \alpha$, что $A \cap L \neq \varnothing$ для любого $L \in F$ [8].

Фильтр F_x в (X,U) называется фильтром окрестностей точки x в (X, τ), если внутренность каждого

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

элемента фильтра F, относительно топологии τ, содержит точку x [1], [2], [3].

Слабый фильтр Коши F сходится в (X,U) к точке x, если F сильнее, чем F_x. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения слабого фильтра Коши F в (X, U) если x является точкой прикосновения каждого элемента F в (X,U).

Лемма 1. В (X, U) всякий сходящийся фильтр является слабым фильтром Коши. Любая точка прикосновения слабого фильтра Коши F в (X, U) является его пределом.

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$ - некоторое равномерное покрытие и $\beta \in U$ такое покрытие, что $\beta * \succ \alpha$. Для каждой точки $x \in X$ и для $\beta \in U$, множество $\beta(x)$ является окрестностью точки x в (X,U) Если F - фильтр, сходящиеся к x, то найдется такое $O \in F$, которое содержится в $\beta(x)$, и $\beta(x) \in F$. Поэтому существует $A \in \alpha$ такое, что $A \cap N \neq \varnothing$, $N \in F$, следовательно, F слабый фильтр Коши в (X, U).

F_x – фильтр окрестностей точки x в (X,U). Положим $F_1 = \{A \subseteq X$: найдутся $O \in F_x$ и $\mathrm{B} \in F$ такие, что $O \cap \mathrm{B} \subseteq A\}$. Ясно, что F_1 - фильтр в X и $F \subseteq F_1$, легко доказать, что F_1 есть слабый фильтр Коши в (X, U). Пусть F_0 - единственный минимальный слабый фильтр Коши, содержащийся в F_1, тогда F_x и F_0 - оба минимальные слабые фильтры Коши, содержащиеся в F_1, так что $F_0 = F_x$, чем доказана сходимость F к x.

Лемма 2. Если $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и N - база слабого фильтра Коши в (X,U), то $fN = \{fH : H \in N\}$ является базой слабого фильтра Коши в (Y,V).

Доказательство. Пусть $\beta \in V$, F - слабый фильтр Коши в (X,U) и N - база. Найдется такое $B \in \beta$, что $f^{-1}B \cap L \neq \varnothing$, $L \in F$, поэтому $H_0 \subset L$ для некоторого $H_0 \in N$. Пусть $F_Y = \{O \subset Y : \exists H \in N, O \supset fH\}$. Заметим, что F_Y фильтр. Пусть $O \in F_Y$ - некоторое множество. Поскольку $f^{-1}B \cap H_0 \neq \varnothing$ и $fH_0 \subset O$, то $f^{-1}B \cap O \neq \varnothing$, таким образом, F_Y - слабый фильтр Коши в (Y,V) и fN его база.

Минимальные по включению элементы множества всех слабых фильтров Коши в (X, U) называются минимальными слабыми фильтрами Коши в (X, U).

Лемма 3. Для любого слабого фильтра Коши F в (X, U) существует единственный минимальный слабый фильтр Коши F_0, содержащийся в F, пусть A - база фильтра F и B - база равномерности U. Тогда система $\{\alpha(A) : A \in \mathrm{A}, \alpha \in B\}$ образует базу F_0.

Доказательство. Пусть A_1, A_2 - любые множества из A, а α_1 и α_2 - из B. Тогда в A и в B существуют $A_3 \in \mathrm{A}$ и $\alpha_3 \in \mathrm{B}$ такие, что $A_3 \subset A_1 \cap A_2$ и, $\alpha_3 \succ \alpha_1$, следовательно, $\alpha_3(A_3) \subset \alpha_1(A_1) \cap \alpha_2(A_2)$ $\alpha_3(A_3) \subset \alpha_1(A_1) \cap \alpha_2(A_2)$. Значит, $\{\alpha(A) : \alpha \in \mathrm{B}, A \in \mathrm{A}\}$ образует базу некоторого фильтра F_0 в X.

Пусть $\alpha \in U$. Найдется $\beta \in U$ такое, что $\beta * \succ \alpha$. Найдется $B \in \beta$ такое, что $B \cap N \neq \varnothing$ для любого $N \in F_0$. Для $B \in \beta$ существует $A \in \alpha$ такое, что $\beta(B) \subset A$, поскольку, $B \cap N \neq \varnothing$ для любого $N \in F_0$ и $\beta(B) \subset A$, то $A \cap N \neq \varnothing$ для любого $N \in F_0$, поэтому, F_0 слабый фильтр Коши в (X, U). Пусть F_1 некоторый слабый фильтр Коши в (X, U), содержащейся в F. Нужно доказать справедливости $F_0 \subset F_1$. Пусть $A \in \mathrm{A}$ и $\alpha \in \mathrm{B}$, поскольку, A база для F и $F_1 \subseteq F$, то $A_1 \cap A \neq \varnothing$, следо-

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

вательно, $A_1 \subset \alpha(A)$, значит, $\alpha(A) \cap M \neq \varnothing$ для любого $N \in F_1$, итак, $F_0 \subseteq F_1$.

Фильтр F_x окрестностей любой точки $x \in X$ в (X,U) есть минимальный слабый фильтр Коши в (X, U).

Лемма 4. Пусть F_1 и F_2 - слабые фильтры Коши в (X, U) и F_1 сильнее, чем F_2. Если F_2 сходится к точке $x \in X$, то F_1 тоже сходится к точке x. Если U_1 и U_2 - равномерности в X и U_1, сильнее, чем U_2 и F - слабый фильтр Коши в (X, U_1), то F есть слабый фильтр Коши и в (X, U_2).

Доказательство. Пусть F_1 - сильнее, чем F_2, и F_2 сходится к точке $x \in X$. Покажем, что F_1 тоже сходится к точке x. Пусть O_x - фильтр окрестностей точки $x \in X$, тогда $O_x \in F_2$, поскольку, $F_2 \subset F_1$, то $O_x \subset F_1$, следовательно, F_1 сходится к $x \in X$.

Пусть F - слабый фильтр Коши в (X, U_1). Для любого $\alpha \in U_1$ найдется такое $A \in \alpha$, что $A \cap L \neq \varnothing$, $L \in F$. Поскольку U_1, сильнее, чем U_2, то для любого $\beta \in U_2$ найдется такое $B \in \beta$, что $B \cap L \neq \varnothing$, $L \in F$, следовательно, F есть слабый фильтр Коши в (X, U_2).

Определение 1. Равномерное пространство называется сильно полным, если всякий слабый фильтр Коши в нем сходится.

Приведем некоторые свойства сильно полных равномерных пространств.

1. Любое сильно полное пространство полно;
2. Пусть (X, τ) - тихоновское пространство U_1 и U_2 - две равномерности в X такие, что $\tau_{U_1} = \tau_{U_2} = \tau$ и $U_1 \supset U_2$. Если пространство (X, U_2) - сильно полно, то пространство (X, U_1) - тоже сильно полно;
3. Пусть X - паракомпактное пространство. Пусть U_X - универсальная равномерность пространства X. Тогда равномерное пространство (X,U_X) сильно полно;
4. Произведение любого числа сильно полных равномерных пространств является сильно полным.

Определение 2. Равномерное пространство (X, U) называется сильно μ-полным, если всякий слабый фильтр Коши F в (X, U) имеющую базу мощности $\leq \mu$ сходится к некоторой точке $x \in X$ в (X,U). Сильно $\aleph_0$ - полные пространства называются сильно секвенциально полными.

Предложение 1. Всякое сильно полное пространство сильно μ - полно.

Доказательство. Пусть F - слабый фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$ и в силу сильной полноты он сходится к некоторой точке пространства (X, U), следовательно, пространство (X, U) сильно μ - полно.

Следствие 1. Всякое сильно полное пространство сильно секвенциально полно.

Предложение 2. Всякое сильно μ - полно пространство μ - полно.

Доказательство. Пусть F - фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$. Тогда из того факта, что всякий фильтр Коши является слабым фильтром Коши и в силу сильной μ - полноты он сходится к некоторой точке пространства (X, U), следовательно, пространство (X,U) является μ - полным.

Следствие 2. Всякое сильно секвенциально полное пространство секвенциально полно.

Предложение 3. Пусть (X,U) - равномерное пространство веса $w(U) \leq \mu$. Если (X,U) сильно μ - полно, то (X,U) сильно полно.

Доказательство. Пусть F - произвольный слабый фильтр Коши в (X, U), а F_0 - минимальный слабый фильтр Коши в (X, U), содержащийся F, так как U имеет счетную базу, то по построению F_0 тоже имеет счетную базу A. (X, U) - сильно секвенциально полно, поэтому F_0 сходится к точке $x_0 \in X$, тогда F тоже

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

сходится к точке $x_0 \in X$ в (X,U), следовательно, (X, U) сильно полно.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность двух понятий секвенциальной полноты и счетно равномерной паракомпактности равномерных пространств.

Следствие 3. Если (X, U) - равномерное пространство со счетной базой и (X, U) сильно секвенциально полно, то (X, U) также сильно полно.

Теорема 1. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) - сильно μ - полно;
2. (X,U) - равномерно μ - паракомпактно.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть (X,U) - μ-полно и α - произвольное открытое покрытие мощности $\leq \mu$. Предположим, что $\alpha^{\angle}$ не является равномерным покрытием. В силу μ-полноты пространства (X,U) всякий слабый фильтр Коши F мощности $\leq \mu$ в (X,U) сходится к некоторой точке $x \in X$, поэтому, для $x \in X$ существует такое $A^{\angle} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ из $\alpha^{\angle}$, что $A^{\angle} \ni x$. Тогда существует такое $M \in F$, что $M \subset A^{\angle}$. Следовательно, $A^{\angle} \cap N \neq \varnothing$ для любого $N \in F$. Значит, $\alpha^{\angle} \in U$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть (X,U) - равномерно μ-паракомпактно и F - произвольный слабый фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$. Предположим, что F не сходится ни к какой точке $x \in X$. Тогда у любой точки $x \in X$ существуют такая открытая окрестность O_x и такой элемент $M \in F$, что $O_x \cap M_x = \varnothing$. В свою очередь для $M \in F$ найдется такое $N \in B$, что $N \subset M$. Пусть $\alpha = \{O_x : x \in X\}$. Будем считать, что $|\alpha| \leq \mu$. Тогда $\alpha^{\angle} \in U$. Поэтому существуют $O_{x_1}, O_{x_2}, ..., O_{x_n} \in \alpha$ такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i} \cap N_{x_i} \neq \varnothing$, для любого $N_{x_i} \in F$. Поскольку $\bigcap\limits_{i=1}^{n} N_{x_i} \in F$, то $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} N_{x_i}) \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}) \neq \varnothing$. Тогда существует такое $i_0 \leq n$, что $M_{x_{i_0}} \cap O_{x_{i_0}} \neq \varnothing$. Мы получили противоречие. Следовательно, слабый фильтр Коши F, имеющий базу мощности $\leq \mu$ сходится, итак, пространство (X,U) - сильно μ - полно.

Следствие 4. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) - сильно секвенциально полно;
2. (X,U) - счетно равномерно паракомпактно.

Следующая теорема является характеристикой μ-паракомпактных пространств при помощи универсальных равномерных структур.

Теорема 2. Нормальное пространство X является μ- паракомпактным в том и только том случае, если равномерное пространство (X, U_X) с универсальной равномерностью U_X является сильно μ- полным.

Доказательство. Необходимость. Пусть X - μ- паракомпактно, т.к. каждое открытое покрытие нормального пространства является нормальным покрытием, то множество всех нормальных открытых покрытий образует базу универсальной равномерности, то пространство (X,U_X) является равномерно μ-паракомпактным, т.е. (X,U_X) является сильно μ- полным согласно выше теореме.

Достаточность. Пусть (X,U_X) является сильно μ-полным. Тогда по теореме 1 пространство (X,U_X) является равномерно μ-паракомпактным, а согласно предложению 1 [8, с. 320], пространство X является μ-паракомпактным.

Следствие 5. Нормальное пространство X является счетно паракомпактным в том и только том случае, если равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является секвенциально с - полным.

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

Из теоремы 1 и предложения 3.4.14. следует следующая теорема

Теорема 3. Всякое равномерно μ - паракомпактное пространство μ - полно.

Следствие 6. Всякое счетно равномерно паракомпактное пространство секвенциально полно.

Теорема 3 является положительным решением проблемы поставленной Б.А. Болжиевым: «Является ли всякое равномерно μ -паракомпактное пространство μ -полным пространством?»

Определение 3. Тихоновское пространство X называется сильно полным по Дьедонне пространством, если существует такая равномерность U , что (X,U) является сильно полным.

Определение 4. Тихоновское пространство X называется сильно μ -полным по Дьедонне пространством, если существует такая равномерность U , что (X,U) является сильно μ -полным. Сильно $\aleph_0$ -полные по Дьедонне пространства называются сильно секвенциально полными по Дьедонне пространством.

Предложение 4. Всякое сильно полное по Дьедонне пространство является сильно μ -полным по Дьедонне пространством.

Предложение 5. Всякое сильно полное по Дьедонне пространство является полным по Дьедонне пространством.

Следствие 7. Всякое сильно полное по Дьедонне пространство является сильно секвенциально полным по Дьедонне пространством.

Теорема 4. Тихоновское пространство X является сильно полным по Дьедонне пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является сильно полным.

Теорема 5. Тихоновское пространство X является сильно μ -полным по Дьедонне пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является сильно μ - полным.

Следствие 8. Тихоновское пространство X является сильно секвенциально полными по Дьедонне пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является сильно секвенциально полным по Дьедонне пространством.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. – Бишкек, 2013. – 160.
3. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. Bishkek: Ilim, 2021.
4. Kanetov B., Kanetova D., Altybaev N. About countably uniformly paracompact spaces // AIP Conf. Proc., New-York, Melville, 2021.-V. 2334. – P. 1-4.
5. Kanetov B., Baidzhuranova A., Almazbekova B. About Weakly Uniformly Paracompact Spaces // AIP Conf. Proc., New-York, Melville, 2022.-V. 2483, 020004.
6. Kanetov B., Baigazieva N., Altybaev N. About uniformly μ -paracompact spaces // International Journal of Applied Mathematics, 2021, 34(2). – P. 353-361.
7. Kanetov B., Zhanakunova M. On uniformly Lindelof spaces // AIP Conf. Proc., New-York, Melville, 2021.-V. 2325. – 020055.
8. Marconi U. On the uniform paracompactness // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1984. – T.72. – P. 319-328.
9. Zhanakunova M., Kanetov B. On strongly uniformly paracompact spaces and mappings // AIP Conf. Proc., New-York, Melville, 2021.-V. 2325. – 020020.