DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 3, 2023

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Аширбаев Б.Ы.

ТУРУКТУУ АРАКЕТТЕГИ СЫРТКЫ КҮЧТӨР МЕНЕН БЕРИЛГЕН СЫЗЫКТУУ СИНГУЛЯРДЫК-ДҮҮЛҮКТҮРҮЛГӨН ДИСКРЕТТИК СИСТЕМАНЫ ДЕКОМПОЗИЦИЯЛОО

Аширбаев Б.Ы.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

B. Ashirbaev

DECOMPOSITION OF A LINEAR SINGULARLY PERTURBATED DISCRETE SYSTEM WITH CONSTANTLY ACTING EXTERNAL FORCES

УДК: 517. 977.5. 928.2

Башкаруу маселелерин изилдөө процессинде моделдердин жогорку өлчөмдөрү жана бир канча убактылуу массивдердин пайда болушу менен байланышкан татаалдыктар келип чыгат. Бул сыяктуу татаалдыктардан арылуу үчүн башкаруу маселелеринин теориясында моделдерди декомпозициялоо колдонулат. Макалада туруктуу аракеттеги сырткы күчтөр жана майда кадам менен берилген сызыктуу сингулярдык-дүүлүктүрүлгөн дискреттик системанын өзгөрмөлөрүнүн абалдарын бөлүү маселеси каралды. Маселенин чыгарылышынын жыйынтыгында жай жана тез кыймылдагы системанын алдындагы системалардан турган система алынды. Алынган система алгачкы системага эквиваленттүү, анткени ал алгачкы системанын башкарылуучулук жана байкоочулук касиеттерине ээ боло алат. Системанын өзгөрмөлөрүнүн абалдарын бөлүү маселесинин зарыл жана жетиштүү шарты болуп өзгөрмөлөрдү бөлүү процессинде пайда болгон Риккати жана Ляпунов матрицалык айырмачыл теңдемелеринин чыгарылыштарынын бар болушу эсептелинет. Макалада бул теңдемелердин чыгарылыштары бир калыпта жыйналуучу катарлар түрүндө болоору аныкталды жана бул катарлардын мүчөлөрүн аныктоочу формулалар чыгарылды.

Негизги сөздөр: *дискреттик система, моделдердин ажыроосу, туруктуу тышкы күч, башкарылуучулук, байкоочулук, Риккати айырмачыл теңдемелери, Ляпунов айырмачыл теңдемелери.*

В процессе исследования задач управления возникают сложности прежде всего, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием нескольких временных массивов. Для устранения таких сложностей в задачах теории управления применяются декомпозиция моделей. В статье рассмотрена задача разделения переменных состояния линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы с малым шагом и с постоянно действующими внешними силами. В результате решений задачи получена система разделенные на медленные и быстрые подсистемы, которые связаны с управляющей функцией. Полученная система является эквивалентной к исходной, так как она обладает всеми свойствами управляемости и наблюдаемости исходной системы. Необходимым и достаточным условием для получения эквивалентной системы, является существования решения матричных разностных уравнений Риккати и Ляпунова, появляющиеся в процессе разделения переменных состояния. В работе установлены, что эти уравнения имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов и выведены формулы определяющие члены этих рядов.

Ключевые слова: *дискретная система, декомпозиция моделей, постоянно действующая внешняя сила, управляемость, наблюдаемость, разностные уравнения Риккати, разностные уравнения Ляпунова.*

In the process of studying control problems, difficulties arise primarily due to the high dimensionality of the models and the presence of several temporary arrays. To eliminate such complexities in problems of control theory, decomposition of models is used. The article considers the problem of separating the state variables of a linear singularly perturbed discrete system with a small step and constantly acting external forces. As a result of solving the problem, a system was obtained divided into slow and fast subsystems, which are associated with the control function. The resulting system is equivalent to the original one, since it has all the controllability and observability properties of the original system. A necessary and sufficient condition for obtaining an equivalent system is the existence of a solution to the matrix difference equations of Riccati and Lyapunov, which appear in the process of separation of state variables. The paper establishes that these equations have solutions that can be represented in the form of uniformly convergent power series and derive formulas defining the terms of these series.

Key words: *discrete system, decomposition of models, constant external force, controllability, observability, Riccati difference equations, Lyapunov difference equations.*

Введение. Проблема разделения движений в управляемых системах рассматривались многими авторами, среди них можно отметить работы [1], [2], [3]. Такие же задачи в линейных дискретных управляемых системах с малым шагом велись и в наших работах [4], [5], [6]. Данная работа является развитием исследований вышеупомянутых работ по данной проблеме.

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим линейную дискретную управляемую систему с малым шагом и с постоянно действующими внешними силами

$$y(t+T) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(t,\mu), \tag{1}$$

где векторы состояния: $y(t) = \big(x(t)\ z(t)\big)', x(t) \in R^n, z(t) \in R^m$;

матрицы состояния и управления: $A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{1}{\mu}A_3(t) & \frac{1}{\mu}A_4(t) \end{pmatrix}$,

$B(t,\mu) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \frac{1}{\mu}B_2(t) \end{pmatrix}, A_1(t) - (n \times n), A_2(t) - (n \times m), A_3(t) - (m \times n), A_4(t) - (m \times m),$

$B_1(t) - (n \times r), B_2(t) - (m \times r)$;

вектор управления $u(t) \in R^r$;

постоянно действующие внешние силы:

$f(t,\mu) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \frac{1}{\mu}f_2(t) \end{pmatrix}, f_1(t) \in R^n, f_2(t) \in R^m$;

время переходного процесса:

$t = kT,\ \ k = 0,\ 1, \cdots, M-1,\ \ M = \frac{1}{T},\ T -$малый шаг, $0 \le T \le 1,\ \mu -$малый параметр, $0 < \mu < 1,$ штрих обозначает транспонирование.

Уравнения выхода системы (1) представим в виде

$$c(t) = D(t)y(t) + L(t)u(t), \tag{2}$$

где векторы выхода: $c_1(t) \in R^n,\ c_2(t) \in R^m$;

матрицы состояния и управления вектора выхода:

$D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_3(t) & D_4(t) \end{pmatrix}, L(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \end{pmatrix},$

$D_1(t) - (n \times n), D_2(t) - (n \times m), D_3(t) - (m \times n),$

$D_4(t) - (m \times m), L_1(t) - (n \times r), L_2(t) - (m \times r).$

Пусть заданы начальные и конечные состояния системы (1):

$$y(0) = y_0 = \big(x(0)\ \ z(0)\big)' = (x_0\ \ z_0)', \tag{3}$$

$$y(M) = y_M = \big(x(M)\ \ z(M)\big)' = (x_M, z_M)'. \tag{4}$$

Предположим, что

1. Собственные значения матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству

$\left|Re\lambda_j(t)\right| \le \gamma < 1,\ \ j = \overline{1,m},$

где $\gamma -$ некоторая постоянная.

При выполнении условий 1 в системе (1) производим разделение переменных с помощью замены [3], [4], [5]:

$$x(t,\mu) = \tilde{x}(t,\mu) - \mu N(t,\mu)\tilde{z}(t,\mu), \tag{5}$$

$$z(t,\mu) = \tilde{z}(t,\mu) + H(t,\mu)x(t,\mu), \tag{6}$$

где матрицы $H(t,\mu)$ и $N(t,\mu)$ имеют размерности $m \times n$ и $n \times m$ соответственно. В дальнейшем принимаем $x(t,\mu) = x(t), \tilde{x}(t,\mu) = \tilde{x}(t),$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

$z(t,\mu)=z(t), \tilde{z}(t,\mu)=\tilde{z}(t), H(t,\mu)=H(t), N(t,\mu)=N(t)$.

Соотношения (5), (6) записываем в матричных формах [4], [5]:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N(t) \\ H(t) & E_m-\mu H(t)N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n-\mu N(t)H(t) & \mu N(t) \\ -H(t) & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Введем обозначения

$$P(t,\mu) = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N(t) \\ H(t) & E_m-\mu H(t)N(t) \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

согласно формуле Фробениуса [6] имеем

$$P^{-1}(t,\mu) = \begin{pmatrix} E_n-\mu N(t)H(t) & \mu N(t) \\ -H(t) & E_m \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Тогда соотношения (7), (8) записывается в виде [7]

$$y(t)=P(t,\mu)\tilde{y}(t),\ \ \tilde{y}(t)=P^{-1}(t,\mu)y(t). \qquad (11)$$

С учетом (11) уравнения (1) имеет вид

$$P(t+T,\mu)\tilde{y}(t+T)=A(t,\mu)P(t,\mu)\tilde{y}(t)+B(t,\mu)u(t)+f(t,\mu)$$

или

$$\tilde{y}(t+T)=P^{-1}(t+T,\mu)A(t,\mu)P(t,\mu)\tilde{y}(t)+$$
$$+P^{-1}(t+T,\mu)B(t)u(t)+P^{-1}(t+T,\mu)f(t,\mu). \qquad (12)$$

Теорема. *Если выполняется условия 1 и матрицы $H(t)$, $N(t)$ удовлетворяют уравнениям:*

$$\mu H(t+T)A_1(t)+\mu H(t+T)A_2(t)H(t)=A_3(t)+A_4(t)H(t), \qquad (13)$$

$$N(t+T)\tilde{A}_4(t,\mu)+\mu\tilde{A}_1(t,\mu)N(t)-A_2(t)=0, \qquad (14)$$

то систему (1) можно разделить на две подсистемы меньшего порядка вида:

$$\tilde{x}(t+T)=\tilde{A}_1(t,\mu)\tilde{x}(t)+\tilde{B}_1(t,\mu)u(t)+\tilde{f}_1(t,\mu), \qquad (15)$$

$$\mu\tilde{z}(t+T)=\tilde{A}_4(t,\mu)\tilde{z}(t)+\tilde{B}_2(t,\mu)u(t)+\tilde{f}_2(t,\mu), \qquad (16)$$

где

$$\tilde{A}_1(t,\mu)=A_1(t)+A_2(t)H(t),\ \ \tilde{A}_4(t,\mu)=A_4(t)-\mu H(t+T)A_2(t), \qquad (17)$$

$$\tilde{B}_1(t,\mu)=B_1(t)+N(t+T)\tilde{B}_2(t,\mu),\ \ \tilde{B}_2(t,\mu)=B_2(t,\mu)-\mu H(t+T)B_1(t),$$

$$\tilde{f}_1(t,\mu)=f_1(t)+N(t+T)\tilde{f}_2(t,\mu),\ \ \tilde{f}_2(t,\mu)=f_2(t,\mu)-\mu H(t+T)f_1(t).$$

Граничные условия системы (15) и (16) определяются соотношениями:

$$\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0,\ \ \tilde{z}(0)=\tilde{z}_0, \qquad (18)$$

$$\tilde{x}(M)=\tilde{x}_M,\ \ \tilde{z}(M)=\tilde{z}_M, \qquad (19)$$

где

$$\tilde{x}_0(t,\mu)=x_0+\mu N_0(t)\tilde{z}_0,\ \ \tilde{z}_0(t)=z_0-H_0(t)x_0, \qquad (20)$$

$$\tilde{x}_M(t,\mu)=x_M+\mu N_M(t)\tilde{z}_M,\qquad \tilde{z}_M(t)=z_M-H_M(t)x_M.$$

Доказательство. Уравнению (12) записываем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t+T) \\ \tilde{z}(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n-\mu N(t+T)H(t+T) & \mu N(t+T) \\ -H(t+T) & E_m \end{pmatrix} \times$$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

$$\times\begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{1}{\mu}A_3(t) & \frac{1}{\mu}A_4(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -\mu N(t) \\ H(t) & E_m-\mu H(t)N(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{z}(t)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} E_n-\mu N(t+T)H(t+T) & \mu N(t+T) \\ -H(t+T) & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1(t)\\ \frac{1}{\mu}B_2(t)\end{pmatrix}u(t)+$$

$$+\begin{pmatrix} E_n-\mu N(t+T)H(t+T) & \mu N(t+T) \\ -H(t+T) & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(t)\\ \frac{1}{\mu}f_2(t)\end{pmatrix}$$

и выполним произведение матриц:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}(t+T)\\ \tilde{z}(t+T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1(t)-\mu N(t+T)H(t+T)A_1(t)+N(t+T)A_3(t) \\ -H(t+T)A_1(t)+\frac{1}{\mu}A_3(t)\end{pmatrix.}$$

$$\left.\begin{matrix} A_2(t)-\mu N(t+T)H(t+T)A_2(t)+N(t+T)A_4(t) \\ -H(t+T)A_2(t)+\dfrac{1}{\mu}A_4(t)\end{matrix}\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_n & -\mu N(t) \\ H(t) & E_m-\mu H(t)N(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{z}(t)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} B_1(t)-\mu N(t+T)H(t+T)B_1(t)+\mu N(t+T)B_2(t) \\ -H(t+T)B_1(t)+\dfrac{1}{\mu}B_2(t)\end{pmatrix}u(t)+$$

$$+\begin{pmatrix} f_1(t)-\mu N(t+T)H(t+T)f_1(t)+\mu N(t+T)f_2(t) \\ -H(t+T)f_1(t)+\dfrac{1}{\mu}f_2(t)\end{pmatrix}.$$

При выполнении равенств (13), (14) и с учетом (17) из последнего равенства получаем

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}(t+T)\\ \tilde{z}(t+T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_1(t,\mu) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu}\tilde{A}_4(t,\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}(t)\\ \tilde{z}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tilde{B}_1(t,\mu)u(t)\\ \frac{1}{\mu}\tilde{B}_2(t,\mu)u(t)\end{pmatrix}++\begin{pmatrix}\tilde{f}_1(t,\mu)\\ \frac{1}{\mu}\tilde{f}_2(t,\mu)\end{pmatrix},$$ теорема доказана.

Теперь учитывая (9) и (10) вектор выхода $c(t)$ можно представить в виде

$$c(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_3(t) & D_4(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -\mu N(t) \\ H(t) & E_m-\mu H(t)N(t)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_n-\mu N(t)H(t) & \mu N(t) \\ -H(t) & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L_1(t)\\ L_2(t)\end{pmatrix}u(t).$$

С учетом (8) из последнего равенства получаем

$$\tilde{c}(t)=\begin{pmatrix}\tilde{c}_1(t)\\ \tilde{c}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{D}_1(t) & \widetilde{D}_2(t) \\ \widetilde{D}_3(t) & \widetilde{D}_4(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L_1(t)\\ L_2(t)\end{pmatrix}u(t).$$

или

$$\tilde{c}_1(t)=\widetilde{D}_1(t)\tilde{x}(t)+\widetilde{D}_2(t)\tilde{z}(t)+L_1(t)u(t), \qquad (21)$$
$$\tilde{c}_2(t)=\widetilde{D}_3(t)\tilde{x}(t)+\widetilde{D}_4(t)\tilde{z}(t)+L_2(t)u(t),$$

где

$$\widetilde{D}_1(t)=D_1(t)+D_2(t)H(t), \qquad (22)$$
$$\widetilde{D}_2(t)=D_2(t)(E_m-\mu H(t)N(t))-\mu D_1(t)N(t),$$
$$\widetilde{D}_3(t)=D_3(t)+D_4(t)H(t),$$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

$$\widetilde{D}_4(t) = D_4(t)(E_m - \mu H(t)N(t)) - \mu D_3(t)N(t).$$

При выполнении условий 1 уравнения (13) и (14) имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [3], [7], [8]:

$$H(t,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(t)\mu^i, \quad N(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} N_s(t)\mu^s. \tag{23}$$

Матрицы $H_i(t)$ и $N_s(t)$ $(i, s = 0, 1, \cdots)$ определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (13), (14). В результате имеем:

$$H_0(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t), \tag{24}$$

$$H_1(t,\mu) = A_4^{-1}(t)[H_0(t)A_1(t) + H_0(t)A_2(t)H_0(t)],$$

$$H_2(t,\mu) = A_4^{-1}(t)[H_1(t+T)A_1(t) + H_1(t+T)A_2(t)H_0(t) +$$

$$+H_0(t)A_2(t)H_1(t)],$$

$$H_3(t,\mu) = A_4^{-1}(t)[H_2(t+T)A_1(t) + H_1(t+T)A_2(t)H_1(t) +$$

$$+H_2(t+T)A_2(t)H_0(t) + H_0(t)A_2(t)H_2(t)],$$

$$\vdots$$

$$H_i(t,\mu) = A_4^{-1}(t)[H_{i-1}(t+T)A_1(t) + H_0(t)A_2(t)H_{i-1}(t) +$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{i-1} H_\sigma(t+T)A_2(t)H_{v-1}(t)\Big], i = 1,2,\cdots;\ v = i-1, i-2, i-3, \cdots,$$

$$N_0(t+T) = A_2(t)\tilde{A}_4^{-1}(t), \tag{25}$$

$$N_1(t+T) = -\tilde{A}_1(t)N_0(t)\tilde{A}_4^{-1}(t),$$

$$N_2(t+T) = -\tilde{A}_1(t)N_1(t)\tilde{A}_4^{-1}(t),$$

$$N_3(t+T) = -\tilde{A}_1(t)N_2(t)\tilde{A}_4^{-1}(t),$$

$$\vdots$$

$$N_s(t+T) = -\tilde{A}_1(t)N_{s-1}(t)\tilde{A}_4^{-1}(t), s = 0,1,2,\cdots.$$

Заключение. Предложенный способ декомпозиция линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы с малым шагом и с постоянно действующими внешними силами, позволяет понизить порядок исследуемой системы и может применяться при исследовании управляемости и наблюдаемости системы, при нахождении оптимального управления, оптимальной траектории дискретных задач оптимального управления и при построении приближенного решения алгебраических уравнений Риккати и Ляпунова.

Литература:

1. Геращенко Е.И. Метод разделение движений и оптимизация нелинейных систем [Текст] / Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко. - М: Наука, 1975. - 296 с.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления [Текст] /Б. Куо. - М: Машиностроение, 1986. - 448 с.
3. Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий [Текст] /В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. - М: Наука, 1988. - 256 с.
4. Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция и алгоритм решения задач оптимального управления с малым шагом /Б.Ы. Аширбаев. Известия КГТУ им. И.Раззакова. - 2016. №3 (39). - С. 25-31.
5. Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция линейной дискретной управляемой системы с малым шагом. / Б.Ы. Аширбаев. Вестник КГУСТА №2(64). - Бишкек, 2019. – С. 243-248.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц [Текст] /Ф.Р. Гантмахер. - М: Наука, 1966. - 577 с.
7. Аширбаев Б.Ы. Об одном способе построения переходной матрицы линейной дискретной управляемой системы с малым шагом / Б.Ы. Аширбаев. Горный журнал, научно-технический журнал, т. 2 (1), Бишкек, 2021. – С. 13-17.
8. Аширбаев Б.Ы. Асимптотическое решение линейной сингулярно-возмущенной задачи оптимального быстродействия /Б.Ы. Аширбаев, Г.Ж. Апышова. Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, №7, Бишкек, 2021. – С. 3-9.