Рудаев Я.И., Сеитов Б.М., Ордобаев Б.С.

ТОЛУК ДИАГРАММАНЫН КЫСЫЛГАН БЕТОНДУН ӨЗГӨРҮЛҮШҮНҮН ЖАНА УРАШЫНЫН МАТЕМАТИКАЛЫК КАТАСТРОФАЛЫК ТЕОРИЯСЫ

Рудаев Я.И., Сеитов Б.М., Ордобаев Б.С.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ В ОЦЕНКЕ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ СЖАТОГО БЕТОНА В ПРОЦЕССЕ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

Ya.I. Rudaev, M.B. Seitov, B.S. Ordobaev

MATHEMATICAL CATASTROPHE THEORY IN THE EVALUATION OF THE COMPLETE DIAGRAM OF THE COMPRESSED CONCRETE IN THE PROCESS OF DEFORMATION AND FRACTURE TAKING INTO ACCOUNT THE ACCUMULATION OF DAMAGE

УДК: 624

Кысылууда бетондун формасынын бузулуш модели жасалган. Модел жасоо үчүн математикалык катастрофа теория ыкмасы колдонулган.

***Негизги сөздөр:** бетон, бетондун формасынын бузулуш модели, математикалык катастрофа теориясы, бузулуу көрсөткүчү.*

Моделирование деформационного поведения бетона при сжатии. Для построения модели привлечены методы математической теории катастроф.

***Ключевые слова:** бетон, моделирование деформационного поведения бетона, математическая теория катастроф, параметр повреждаемости.*

Modelling of deformation behavior of concrete in compression. To build the model involved methods of mathematical theory of catastrophes.

***Key words:** concrete, modeling of deformation behavior of concrete, mathematical theory of catastrophes, the parameter of damage.*

Бетон относится к сложным материалам, состоящим из частиц крупного и мелкого заполнителей, соединенных между собой цементным камнем, образуемым путем взаимодействия цемента и воды в результате химической реакции гидратации. Химические процессы продолжаются в цементном камне практически всю жизнь бетона. Важным фактором в бетоне является вода, содержание которой в зависимости от влажности окружающей среды изменяется.

С позиций механики материалов бетон представляет собой начально-неоднородную среду, на напряженно деформированное состояние которой сильнейшие влияние оказывает вся предыдущая история – условия твердения, нагружения, эксплуатации. Исчерпывающей строго обоснованной механической теории бетона до сих пор не создано, хотя такие попытки имеют место, как показано в [1-3]. При этом следует оговориться, что использование методов линейной механики разрушения применительно к бетону нельзя считать вполне оправданным. Такой подход игнорирует историю процесса, предшествующую наступлению разрушения. Привлечение моделей нелинейной механики разрушения связано с анализом «псевдопластических» деформаций в устье основной трещины и развитием второстепенных микротрещин.

Перечисленные методы основаны на ряде гипотез, главным недостатком которых можно считать неучет структурной изменчивости бетона при нагружении, хотя развитие таких процессов вполне очевидно.

На основании сравнительного анализа диаграмм сжатия бетона [4-6] и горных пород [7] установлена идентичность их деформационного поведения. Главное сходство состоит в наличии запредельной области, для которой характерно снижение напряжений с ростом деформаций после достижении предела прочности. Здесь кроется определенный резерв прочности бетона, который можно учесть при расчете сжимаемых и несжимаемых бетонных и железобетонных элементов строительных конструкций. Расхождение между данными опытов состоит в отсутствии на диаграммах «напряжение-деформация» бетонов характерного линейного участка, соответствующего упругой стадии деформирования. Кроме того, обнаружено, что горные породы при напряжении, близком к временному сопротивлению, становятся несжимаемыми [8]. Для бетона подобное не установлено.

Из сказанного можно сделать вывод – определяющие соотношения, полученные при моделировании деформации горных пород [8], могут быть привлечены для описания закономерностей поведения полухрупких тел типа бетона с учетом качественных изменений повреждаемости в процессе деформации и разрушения.

Основная идея заключается в обоснованном использовании математического аппарата теории катастроф [9], причем деформирование рассматривается как размытый структурный переход [10] от упругой стадии до разрушения, а повреждаемость отождествляется со степенью полноты фазового перехода и определяется методами статистической механики [12].

Уравнение состояния для случая одноосного сжатия принято, следуя [8,11], в виде

$$F = \beta / \eta + \eta + F_0 . \qquad (1)$$

$F=\sigma/\sigma^e-1$; $\eta=\varepsilon/\varepsilon^e$; $F_0=\sigma_0/\sigma^e-1$; β – параметр несовершенства ($\beta<0$), причем σ, ε – сжимающие напряжение и деформация; σ^e, ε^e – предел текучести и соответствующая ему деформация.

Укажем, что параметр β принят ответственным как за начальные структурные несовершенства, так и за появившиеся в процессе нагружения. Полагая, следовательно, β чувствительным к текущему структурному состоянию, можно придать ему статус эволюционного параметра. Так как накапливаемые несовершенства связываются с изменчивостью материала, удобным представляется характеризовать указанную изменчивость, следуя [13], параметром повреждаемости $\omega\in]0;1[$.

Будем считать, что параметр ω в области упругих деформаций возрастает слабо, несмотря на очевидную нелинейность диаграммы $\sigma-\varepsilon$. При переходе в зону упрочнения ω растет наиболее интенсивно. Последнее объясняется природой остаточных деформаций начально неоднородных материалов, к которым, как уже упоминалось, относится бетон. Здесь, помимо чисто сдвиговых процессов, характерных для стадии упрочнения, существенный вклад в необратимую составляющую деформации дает разрыхление материала. Кроме того, на указанной стадии следует ожидать появления локализованных областей, в которых частицы материала измельчаются. Тем самым в образовавшейся уже диссипативной структуре зарождаются элементы новой, более сложной структуры. Переход к последней совершается со сменой типа устойчивости и возникновением нового состояния, которому соответствует продолжающийся рост деформаций и снижение напряжений. Параметр повреждаемости в запредельной области растет и при появлении магистральной трещины устремляется к единице.

Установим связь между параметрами β и ω в процессе деформации. Последнее необходимо для непосредственных вычислений напряжений по формуле (1).

Пусть на приращение параметра повреждаемости $d\omega$ параметр несовершенства откликается уменьшением на величину $d\beta$. Примем [8,11], что указанное уменьшение пропорционально параметру β и происходит тем быстрее, чем выше значение ω и ω', где ω' – скорость изменения параметра повреждаемости. Следовательно, имеем

$$d\beta = \beta K(\omega, \omega')d\omega , \qquad (2)$$

причем $K(\omega,\omega')$ – ядро, убывающее с ростом ω и ω'.

Решение уравнение (2) имеет вид

$$\ln\frac{\beta}{\beta_e} = \int_\omega K(\omega, \omega')d\omega , \qquad (3)$$

где в соответствие (2) получаем $\beta_e=\beta|_{\eta=1}=-(1+F_0)$.

Введем абсциссу $\xi=\eta/\eta_c$, $\eta_c = \eta|_{\varepsilon=\varepsilon_c}$, а ε_c – предельная деформация, соответствующая разрушению.

Далее, следуя [8,11], считаем, что величина ω должна рассматриваться как внутренний эволюционный параметр состояния, т.е. $\omega=\omega(\xi,t)$, где (t) – время.

Как следствие методов статистической механики для параметра ω в качестве кинетического принимаем вариант уравнения Фоккера-Планка [12], описывающего вероятность соответствия величины ω в данный момент времени координате ξ. В механическом аспекте удовлетворение уравнение Фоккера-Планка отвечает условию неразрывности параметра ω и, естественно, сохранению сплошности материала. Указанное уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(R(\xi)\omega - \lambda\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right) = 0 , \qquad (4)$$

где $R=R(\xi)$ – коэффициент «дрейфа», учитывающий изменчивость сил внутреннего трения, $\lambda=const$ – коэффициент диффузии.

Статическое нагружение будем считать соответствующим стационарному состоянию ω. Тогда непосредственно из (4) получаем

$$\lambda\frac{d\omega}{d\xi} = R(\xi)\omega . \qquad (5)$$

Здесь учтены характерные для размытого фазового перехода условия $\omega|_{\xi=0}=0$; $\left.\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$.

Проинтегрируем уравнение (5). Имеем

$$\omega(\xi) = A\,exp\left(\frac{1}{\lambda}\int R(\xi)d\xi\right), \qquad (6)$$

причем (A) – постоянная интегрирования.

Явное выражение функции $R=R(\xi)$, пригодное для математического описания исследуемых материалов, примем в форме

$$R(\xi) = C\,exp(\xi)(1 - exp(1-\xi)), \qquad (7)$$

где (C) – постоянная материала.

Укажем, что предложенное выражение (7), как следует из уравнения (5), свойственному для различных фазовых переходов условию $\left.\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\xi=1} = 0$.

Подставляем (7) в (6) и после интегрирования будем иметь

$$ln\,\omega = ln\,A + \frac{1}{\lambda}\left[C\,exp\,\xi - C\xi e + Q\right]. \qquad (8)$$

Здесь (Q) – постоянная интегрирования.

Вернемся теперь к зависимости (4). Примем ядро оператора в виде

$$K(\omega,\omega') = \frac{\lambda}{\omega} + \frac{b+ce}{\omega'}\,, \qquad (9)$$

где $\omega'=d\omega/d\xi$, причем $\omega=\omega(\xi)$ удовлетворяют уравнению (5), b=*const*.

Подставив (9) в (4) и интегрируя полученное равенство, можем записать

$$ln\frac{\beta}{\beta_e} = \lambda\,ln\,\omega + (b+ce)\xi\,. \qquad (10)$$

Разрешив (10) относительно $\ln\omega$ и приравняв этот результат правой части (8), получаем

$$ln\frac{\beta}{\beta_e} = a + b\xi + c\,exp\,\xi\,, \qquad (11)$$

где постоянные материала (a, b, c) удовлетворяют условию

$$a + b\xi_e + c\,exp\,\xi_e = 0\,, \qquad (12)$$

причем $\xi_e=\xi|_{\eta=0}=1/\eta_c$ и, кроме того, $a=\lambda\ln A-Q$.

Теперь можно считать, что установлена связь между значениями ω **(8)** и β **(11)** в параметрической форме, **причем роль** параметра отводится $\xi\in]\xi_e;1[$.

Результаты

Коэффициенты (a, b, c) определены из сопоставления опытных и теоретических данных. Можно показать, что результатам опытов [4-6] по осевому сжатию бетонных образцов соответствует соотношение **(11)** при следующих значениях постоянных, приведенных в таблице 1.

Таблица 1 - Значения постоянных (a, b, c)

Наименование	*a*	*b*	*c*
Опыты А.В. Яшина [4]	-4,7974	-4,1307	4,1185
Опыты Г.Я. Почтовика [5]	-4,9066	4,7268	1,6947
Опыты В.А. Рахманова [6]	-4,9000	-6,5239	4,8549

Для нахождения постоянных λ, A, Q имеем условия $\omega|_{\xi=1}=1$; $\left.\frac{d^2\omega}{d\xi^2}\right|_{\xi=\xi_0}=0$; $\xi_0=\xi|_{\eta=\eta_0}$ и, учитывая вероятностный характер процесса,

$$\int_0^1 \omega(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\,.$$

Из этих условий и формулы (11) можем записать

$$\lambda = -\frac{\exp\xi_0}{c(\exp\xi_0 - e)^2}\,; \qquad A\exp\left[\frac{1}{\lambda}Q\right] = 1\,;$$

$$\frac{1}{2A}\exp\left(-\frac{Q}{\lambda}\right) = \int_0^1 \exp\left[\frac{c}{\lambda}\left(\exp\xi - \xi e\right)\right]d\xi\,. \qquad (13)$$

Результаты численного определения постоянных приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты численного определения постоянных.

Наименование	*λ*	*A*	*Q*
Опыты А.В. Яшина [4]	-3,212	2,454	2,885
Опыты Г.Я. Почтовика [5]	-5,9995	2,028	2,238
Опыты В.А. Рахманова [6]	-1,648	4,332	2,417

Отметим еще одну характерную особенность, наблюдаемую в опытах, – зависимость относительного изменения объема от деформации сдвига. Иными словами, при моделировании закономерностей деформации полухрупких тел существенным является отказ от закона упругого изменения объема. Понятно, что учет изменчивости объемной деформации **θ** должен соответствовать опытным данным при установленных из прямых экспериментов постоянных материала. При этом считаем нецелесообразным разделить изменение объема на упругую и неупругую составляющие, тем более, что последняя при аддитивном подходе рассматривается как сумма мгновенной пластической деформации и составляющей разрыхления, каждая из которых подчиняется определенным закономерностям.

В первом приближении будем считать, что связь между объемной деформацией и параметром несовершенства представляется линейной функцией вида

$$\vartheta = k_1\left(\frac{\beta}{\beta_e}\right) + k_2\,, \qquad (14)$$

где $\theta = \theta/\theta_e$, θ_e – объемная деформация, соответствующая пределу текучести, а k_1, k_2 – аппроксимирующие коэффициенты, приведены в таблице 3.

Таблица 3 - Значения аппроксимирующих коэффициентов.

Наименование	k_1	k_2
Опыты А.В. Яшина [4]	0,7995	-1,8985
Опыты Г.Я. Почтовика [5]	0,8744	-1,7203
Опыты В.А. Рахманова [6]	0,8271	-1,7065

На рисунке 1 теоретические зависимости F–η, рассчитанные по формулам (1) и (11), сравнены с экспериментальными данными при осевом сжатии. Кроме того, показано сравнение опытных и теоретических зависимостей относительной объемной деформации от сдвиговой.

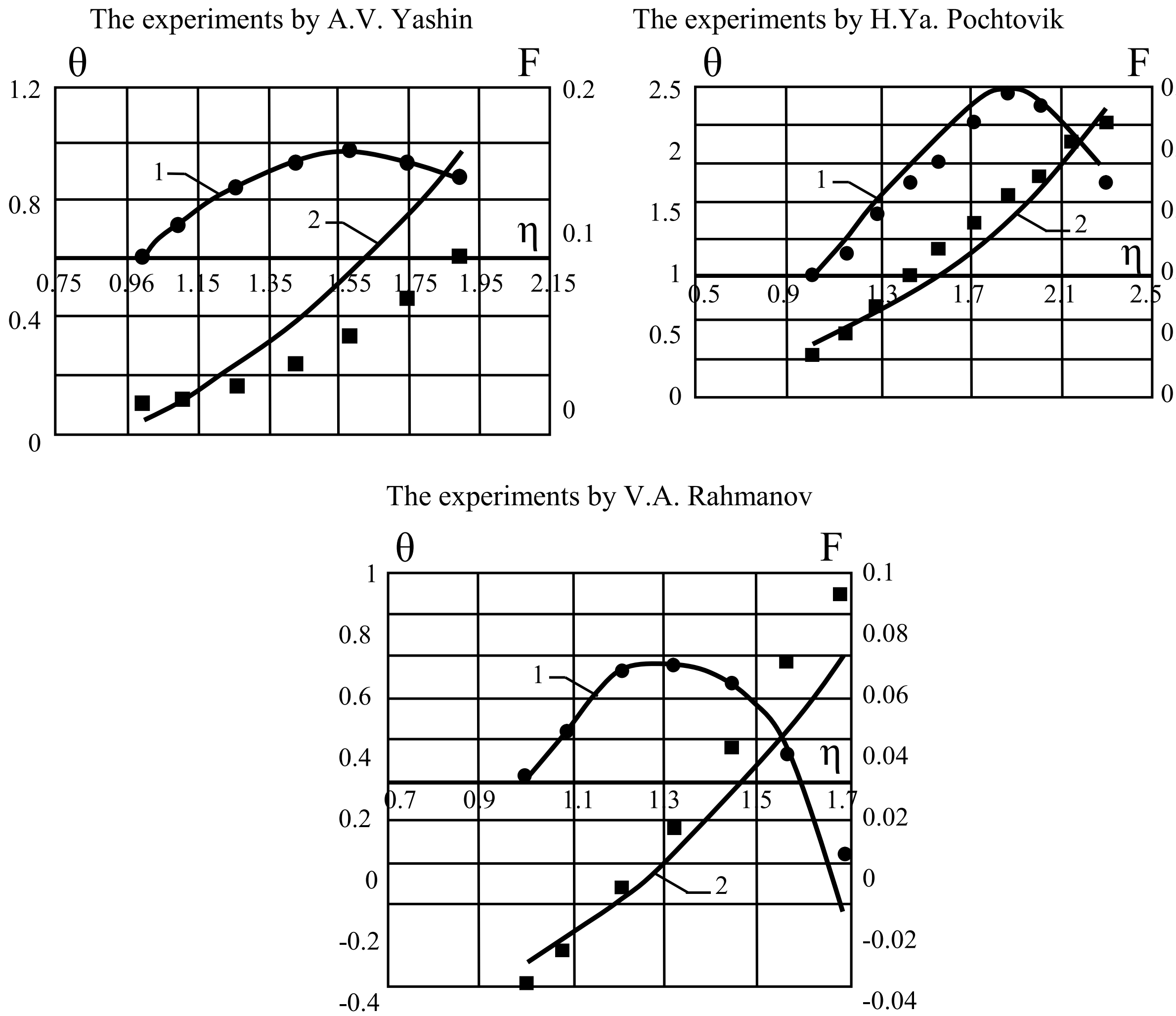

Рис. 1. Сопоставление теоретических и опытных данных: 1) зависимости между приведенными напряжениями (F) и деформациями (η); 2) зависимости между приведенными измениями объема (ϑ) и деформациями (η).

Заключение

В заключение укажем, что предложенная модель включает уравнение состояния (1), уравнение, определяющее вид функции управляющего параметра (11), и выражение для относительного изменения объема (14).

Отметим также, что прием, использованный при формулировке модели, можно считать синергетическим [14]. Это относится к задачам построения физически обоснованных нелинейных определяющих соотношений для сред, в деформационном поведении которых наблюдается иерархия структурных состояний. Последнее имеет место при деформации бетона.

Таким образом, в работе рассмотрена задача формулировки модели, пригодной для описания при осевом сжатии полной диаграммы деформирования материалов, в которых к упругой и пластической деформации добавляется компонента разрыхления. К указанным материалам относятся, в частности, начально неоднородные среды типа горных пород и искусственные строительные материалы, например бетон. Такие материалы, находящиеся в стационарном состоянии, устойчивом относительно малых возмущений, за пределом упругости могут быть интерпретированы как диссипативные структуры. Процесс деформации и разрушения их анализируется как иерархия неустойчивостей, обусловленных самоорганизацией. Для построения модели привлечены методы математической теории катастроф. Энергетическая функция состояния представлена в виде суммы потенциальной функции, ответственной за обратимые деформации, и возмущения. В последнее введен параметр несовершенства (управляющий параметр), связываемый с повреждаемостью. На параметр несовершенства возложена ответственность за процесс структурообразования. Уравнение состояния получено минимизацией энергетической функции по параметру порядка и дополнено кинетическим уравнением для параметра несовершенства. Показана перспективность привлечения методов синергетики к задачам формулировки физически обоснованных нелинейных определяющих соотношений.

Литература:

1. Зайцев Ю.В. Механика разрушения для строителей.- М.: Высш. шк., 1991,- 288 с.
2. Zaytsev, Yu.V., Wittmann, F.H. Primeneniye nelineynoy mekhaniki razrusheniya dlya issledovaniya svoystv betona: istoricheskiy aspekt [Application of non-linear fracture mechanics to investigate properties of concrete: historical aspect] (2013) Vestnik grazhdanskikh inzhenerov, 3 (38), pp. 55-62. (rus)
3. Melnikov, B.E., Semenov, A.S. Creation and application of hierarchical sequence of material models for numerical analysis of elasto-plastic structures (1996) ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 76 (2), pp. 615-616.
4. Яшин А.В. Прочность и деформации бетона при различных скоростях загружения./Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкции. - М.: Стройиздат, 1972. - С. 23-39.
5. Почтовик Г.Я., Красновский Р.О. Применение ультразвукового импульсного метода для оценки структурно-механических характеристик бетонных и железобетонных конструкций при загружении // Методика лабораторных исследований деформаций и прочности бетона. - М.: Госстройиздат, 1962. - С.267-278.
6. Рахманов В.А. Прочность бетона при действии внецентренного динамического нагружения./ Длительные деформативные процессы в бетонных и железобетонных конструкциях - М.: Стройиздат, 1970 - С. 55-65.
7. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах - М.: Недра, 1985. – С. 271.
8. Adigamov, N.S., Rudayev, Ya.I. Equation of state allowing for loss strength of material (1999) Journal of Mining Science, 35 (4), pp. 353-360.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. I. – М.: Мир, 1984. – 350 с.
10. Ролов Б.Н., Юркевич В.Э. Физика размытых фазовых переходов. – Ростов: РГУ, 1983. – 320с.
11. Dovgan, V.I., Kitaeva, D.A., Rudaev, Ya.I. About structure formation self-organization at loading of quasibrittle materials (2005) Proceedings of the XXXIII Summer School “Advanced Problems in Mechanics” (APM-2005), pp. 61-66.
12. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т.2.-М.: Мир, 1978.-400с.
13. Работнов Ю.М. О разрушении вследствие ползучести / / ПМТФ, 1963.-№2 . -**С.** 113-123.
14. Хакен Г. Синергетика: иерархия неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах. - М.: Мир, 1984. – 350 с.

Рецензент: доктор архитектуры, профессор Смирнов Ю.И.