Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А.

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ТҮЗҮЛҮШҮ ЖАНА ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Байзаков А.Б., Жээнбаева Г.А.

РАЗРЕШИМОСТЬ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

A.B. Bayzakov, G.A. Zheenbaeva

SOLVABILITY AND THE STRUCTURE OF SOLUTIONS OF THE INITIAL PROBLEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER

УДК:517.61

Бул макалада жекече туундулуу төртүнчү тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чечилүүсү изилденген жана изделген чыгырылыштар интегралдык көрүнүштө табылган.

Негизги сөздөр: *интегро-дифференциалдык теңдемелер, баштапкы маселе, параметр, жекече туундулуу теңдеме, оператор.*

В данной работе исследована разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и найдено интегральное представление искомых решений.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, начальная задача, параметр, уравнение в частных производных, оператор.*

In this paper we study the solvability of the Cauchy problem for fourth-order integro-differential partial differential equations and find an integral representation of the required solutions.

Key words: *integro-differential equation, initial problem, parameter, partial differential equation, operator.*

$$\begin{aligned}
&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ + \\
&+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \\
&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\ \alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y)\right)+\int_0^t K(t,s,x,\mathrm{y},u(s,x,\mathrm{y}))ds,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \tag{2}$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y), \tag{3}$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\equiv(0,+\infty)$.

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&u(t,x,y)=c(t,x,y)+ \\
&+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $c(t,x,y)$ - известная функция такая, что

$c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y), Q(t,x,y)$ - новая искомая функция.

Предположение (T).

Пусть

$$f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L|_u\right),$$

$$K(t,s,\mathrm{x},\mathrm{y},u)\in\bar{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1|_u\right)$$

$$\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T.$$

Пусть

$$\begin{aligned}H(t,x,y)&=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\ c_{ty}(t,x,y)\ +\\&+\ \alpha^2c_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+\gamma c_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha c_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta c_{tt}(t,x,y)+\\&+2\alpha\beta\gamma c_t(t,x,y)\ +\alpha^2\ c_x\gamma(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma c(t,x,y).\end{aligned}$$

В силу подбора можно считать, $c(t,x,y)$ что

$$\max_{[0,T]\times R\times R}\left\|H(t,x,y)\right\|<+\infty.$$

Подставляем (4) в (1). Из (4) производная по t дает:

$$\begin{aligned}u_t(t,x,y)&=c_t(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds-\\&-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds,\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (4)

$$\begin{aligned}u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)&=\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)+\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds.\end{aligned}\tag{5}$$

Производная обеих частей (5) по t дает:

$$u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu- \tag{6}$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds.$$

Из (6), учитывая (5) имеем

$$u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+\alpha^2 c(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu. \tag{7}$$

Производная обеих частей (7) по x дает:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu.$$

Отсюда с учетом (7) имеем

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta[u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)-$$
$$-c_{tt}(t,x,y)-2\alpha c_t(t,x,y)-\alpha^2 c(t,x,y)],$$

или

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+\ 2\alpha\beta u_t(t,x,y)\ +\ \alpha^2 u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=$$
$$c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+\beta c_{tt}(t,x,y)+ \tag{8}$$
$$+\ 2\alpha\beta\, c_t(t,x,y)+\alpha^2\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

Дифференцируя (8) по y , получаем:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta\, u_{tty}(t,x,y)+\ 2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)\ +\ \alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+\ \beta c_{tty}(t,x,y)+ \tag{9}$$
$$+\ 2\alpha\beta c_{ty}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

Далее, умножив (8) на γ, затем, складывая с (9) почленно, получаем

$$\begin{aligned}&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)+\\&+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).\end{aligned}\tag{11}$$

Из (11), в силу уравнения (1), (4) для определения неизвестной функции $Q(t,x,y)$ получаем нелинейное интегральное уравнение

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds\right]+$$

$$+\int_0^t K(t,s,x,y,c(s,x,y)+\int_0^s\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu d\tau)ds-H(t,x,y)\equiv PQ,\tag{12}$$

Уравнение (12) будем решать применением принципа сжатых отображений.

Пусть

$$Q=\left\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in C\left([0,T_0]\times R\times R\right)\cap\left\|Q(t,x,y)\right\|\le h\right\}.$$

Тогда из уравнения (11) будем иметь $\|PQ\|\le M+N+KT_0$,

где $M\equiv\max f(t,x,y,u),\ N\equiv\max\left\|H(t,x,y)\right\|,\mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,y,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$$M+N+KT_0\le h,\tag{13}$$

то, оператор $PQ:Q\to Q$.

Покажем теперь, что оператор PQ является оператором сжатия. Из (11), используя предположение (Т), имеем

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le(L+L_1\,\mathrm{t})\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\times\|Q_1-Q_2\|\le$$

$$\le\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}\|Q_1-Q_2\|.\tag{14}$$

В выше приведенной оценке были использованы следующие неравенства

$$\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}d\nu\right)d\mu\right]ds\le$$

$$\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma y}\cdot e^{\gamma\nu}\Big|_{\nu=-\infty}^{y}\right)d\mu\right]ds\le\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Выберем константы $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\, u\, T_0$ так, чтобы выполнялось неравенство вида $\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1$.

Тогда в силу предположения (Т) из (14) следует, что PQ есть оператор сжатия на множестве Q. По принципу сжатых отображений следует, что система нелинейных интегральных уравнений (12) имеет единственное непрерывное решение $Q(t,x,y)\in Q$. Подставив найденную функцию в (4) получим решение задачи Коши (1)-(3).

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений задачи Коши (1)-(3). Для всех $Q(t,x,y)\in Q$ из равенства (4) следует неравенство

$$\left\|u(t,x,y)\right\| \le \left\|c(t,x,y)\right\| + \left\|\int_0^t \int_{-\infty}^x \sin \int_{-\infty}^y (t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds\right\| \le$$

$$\le C_0 + \frac{T_0 h}{\alpha\beta\gamma} = M_0 = const \cdot$$

Из (5) имеем

$$\left\|u_t(t,x,y) + \alpha u(t,x,y)\right\| \le \left\|\alpha c(t,x,y) + c_t(t,x,y)\right\| +$$

$$+\left\|\int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds\right\| \le C_1 + \frac{h}{\alpha\beta\gamma} = M_1 = const\,.$$

Аналогично, из (7)-(9) можно доказать, что все производные входящие в уравнение (1), равномерно ограничены.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнено предположение (T). Тогда задача Коши (1)-(3) имеет решение $u(t,x,y) \in \overline{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$, которое представимо в виде (4).

Замечание. Если в уравнении (1) $K(t,s,\mathrm{x},\mathrm{y},u) \equiv 0$ и окажется линейным, т.е. правая часть не зависит от u и имеет вид $f(t,x,y)$, то решение задачи (1)-(3) можно найти в квадратурах

$$u(t,x,y) = c(t,x,y) + \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\left[f(s,\mu,\nu) - H(s,\mu,\nu)\right]d\nu d\mu ds.$$

Это утверждение следует из (12), (4).

Литература:

1. Байзаков А.Б. Методы преобразования решений в аналитической и асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений: Дисс.…докт. физ.-мат.наук: 01.01.02.– Бишкек, 2011. 164 с.
2. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Поиск (научн. прилож. международ. журнала «Высшая школа Казахстана»), сер. мат.-техн. наук М1, Алмата, 2009. – С 209-213.

Рецензент: д.ф.-м.н., доцент Темиров Б.К.