Бабаев Сайфулло, Бекмаматов З.М.

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КУРАМА ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЛОКАЛДУУ ЭМЕС МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ

Бабаев Сайфулло, Бекмаматов З.М.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

S.Babaev, Z.M.Bektamatov

ON THE NONLOCALS PROBLEM FOR EQUATIONS OF COMPOSITE AND HYPERBOLIC TYPES OF FOURTH ORDER

УДК: 517.956.6

R^2 тегиздигинин тик бурчтуу аймагында төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн локалдуу эмес маселе изилденген. Аралаш типтеги теңдемелер теориясынын усулдары менен маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденеген.

***Негизги сөздөр:** локалдуу эмес маселе, четки шарттар, чектик шарттар, Гриндин функциясы, Гурсанын маселеси, Фредгольмдун жана Вольтеррдин теңдемелери, Дирихленин маселеси.*

В прямоугольной области плоскости R^2 исследована нелокальная задача для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка. Методами теории уравнений смешанного типа доказано существование и единственность решения задачи.

***Ключевые слова:** нелокальная задача, краевые условия, функция Грина, задача Гурса, уравнения Фредгольма и Вольтерра, задача Дирихле.*

In rectangle domain of R^2 we are investigated nonlocals problem for equations of composite and hyperbolic types of fourth order. By methods of mixed type equations we are established uniquely solvable of nonlocals problem.

***Key words**: nonlocals problem, boundary value problem, function of Green, Goursat problem, equations of Fredholm and Volterra, Dirichlets problem.*

1. Постановка задачи. Пусть D – прямоугольная область плоскости переменных x и y ограниченная отрезками прямых

$$x=0,\ x=l,\ y=h,\ y=-h_1,\ (h>0,\ h_1>0):\ D_1=D\cap(y>0),\ D_2=D\cap(y<0).$$

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap\left[C^{3+1}(D_1)\cup C^{1+3}(D_1)\cup\cup C^{3+1}(D_2)\right]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tilde{o}\partial\acute{o}}+\grave{A}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+C(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1}$$

и краевым условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(l,y)=\varphi_2(y), \tag{2}$$

$$u_{xx}(l,y)=\varphi_3(y),\ u_{yy}(x,h)=f_1(x), \tag{3}$$

$$u(x,h)=f_2(x),\ 0\le x\le l,\ 0\le y\le h, \qquad (4) \text{ а также}$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}+\mathrm{d}u=0 \tag{5}$$

и краевым условиям

$$u(0,y)=\psi_1(y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi_2(y),\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\psi_3(y),\quad -h_1\le y\le 0, \tag{6}$$

где $A(x,y),\ B(x,y),\ C(x,y),\ \varphi_i(y),\ \psi_i(y)\ (i=\overline{1,3}),\ f_j(x)\ (j=1,2)$ - заданные вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования:

$$A(x,y), B(x,y)\in C^{1+1}(D_1),\ C(x,y)\in C(D_1),\ \varphi_i(y)\in C^3[0,h]\ (i=1,2),\ f_2(x)\in C^3[0,l],$$

$$\varphi_3(y)\in C^1[0,h], f_1(x)\in C^1[0,l], \psi_1(y)\in C^3[-h_1,0],\ \psi_2(y)\in C^2[-h_1,0],\ \psi_3(y)\in C^1[-h_1,0]; \quad (7)$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_1(h)=f_2(0),\ \varphi_3''(h)=f_1''(l),\ f_2(l)=\varphi_2(h),\ f_2''(l)=\varphi_3(h),\ f_1(l)=\varphi_2''(h),$$

$\varphi_1''(h)=f_1(0), \psi_2(0)=\varphi_1'(0), \psi_3(0)=\varphi_1''(0);$ d – заданная вещественная постоянная.

Согласно постановке задачи 1, введём следующие обозначения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ u_{yy}(x,+0)=\mu(x),\ 0\le x\le l, \tag{8}$$

где $\tau(x)$ è $\mu(x)$ – пока неизвестные функции, причем для них должны быть выполнены следующие условия согласования:

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(l)=\varphi_2(0),\ \tau''(l)=\varphi_3(0),\ \varphi_1''(0)=\mu(0),\ \varphi_2''(0)=\mu(l). \tag{9}$$

Исследования краевых задач для гиперболического и смешанно параболо–гиперболического уравнения четвертого порядка рассмотрены в [1], [2]. Представляет интерес исследование краевых задач для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка. Некоторые классы таких уравнений изучены в [3], [4]. По классификации авторов работы [5] уравнения (1) и (5) являются соответственно уравнениями составного и гиперболического типов.

В настоящей работе используя методы теории уравнений смешанного типа [6] доказывается существование и единственность решения задачи 1.

Если нам удастся найти функции $\tau(x)$ è $\mu(x)$, то задача 1 расщепляется на две следующие самостоятельные задачи:

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)\in C^2(\overline{D_1})\cap\left[C^{3+1}(D_1)\cup C^{1+3}(D_1)\right]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1), краевым условиям (2), (4) и условию

$$u(x,+0)=\tau(x),\quad 0\le x\le l. \tag{10}$$

Задача 3. Найти функцию $u(x,y)\in C^2(\overline{D_2})\cap C^{3+1}(D_2)$, удовлетворяющую в области D_2 уравнению (5), условие (6) и условию

$$u(x,-h_1)+\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,+0)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{11}$$

где $\psi(x)$ – заданная вещественная непрерывная функция, λ – некоторое заданное постоянное число $(\lambda\ne 0)$.

2. Соотношение, полученное из области D_1. Положим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\vartheta(x,y),\quad (x,y)\in D_1, \tag{12}$$

где $\vartheta(x,y)$ – новая неизвестная функция. Тогда, из уравнения (1) для функции $\vartheta(x,y)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}+A\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+B\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+C\vartheta=0,\quad (x,y)\in D_1. \tag{13}$$

Для уравнения (13) рассмотрим задачу Гурса как задачу 4: найти регулярное в области D_1 решение уравнения (13) удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(x,h)=\chi_1(x),\ \vartheta(l,y)=\chi_2(y),\quad 0\le x\le l,\ 0\le y\le h, \tag{14}$$

где $\chi_1(x)$ и $\chi_2(y)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\chi_1(l) = \chi_2(h). \tag{15}$$

Решение задачи (13), (14) можно представить в виде [7]

$$\vartheta(x,y) = R(x,h;x,y)\chi_1(x) + R(l,y;x,y)\chi_2(y) - R(l,h;x,y)\chi_2(l) + \int_x^l (B(t,h)R(t,h;x,y) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}R(t,h;x,y))\chi_2(t)dt + \int_y^h \left(A(l,t_1)R(t_1,l;x,y) - \frac{\partial}{\partial t_1}R(l,t_1;x,y) \right)\chi_2(t_1)dt_1, \tag{16}$$

где $R(t,t_1;x,y)$ – функция Римана.

Из краевые условия (2)–(4), с учетом (12) и (14) будем иметь

$$\chi_1(x) = f_2'''(x) + f_1(x), \quad \chi_2(y) = \varphi_3(y) + \varphi_2''(y). \tag{17}$$

Подставляя эти значения в (16) найдем $\vartheta(x,y)$ и представляет собой правую часть уравнения (12). Тогда, уравнение (12) перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \vartheta_0(x,y), \tag{18}$$

где $\vartheta(x,y) = \vartheta_0(x,y)$ – уже известная функция. Отсюда, переходя к пределу при $y \to +0$ имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\tau''(x) + \mu(x) = \vartheta_0(x,0), \quad 0 \le x \le l. \tag{19}$$

Для уравнения (19) решая задачу $\tau(0) = \varphi_1(0), \ \tau(l) = \varphi_2(0),$ будем иметь

$$\tau(x) = \alpha(x) + \int_0^l G(x,t)\mu(t)dt, \tag{20}$$

где

$$\alpha(x) = \varphi_1(0) + \frac{x}{l}\left(\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\right) + \int_0^l G(x,t)\vartheta_0(t,0)dt,$$

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(t-l)}{l}, \ 0 \le x < t, \\ \dfrac{t(x-l)}{l}, \ t \le x \le l, \end{cases} \text{ – функция Грина.}$$

3. Представление решения задачи Гурса. Рассмотрим задачу Гурса как задачу 5 для уравнения (5): найти в области D_2 регулярное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6) и условие

$$u(x,-0) = \tau(x), \ 0 \le x \le l. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (5) по x трижды в пределах от 0 до x, затем по y один раз в пределах от y до 0, имеем

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{2}\int_0^y d\eta \int_0^x (x-\xi)^2 u(\xi,\eta)d\xi, \tag{22}$$

где

$$u_0(x,y) = \psi_3(y) + x\psi_2(y) + \frac{x^2}{2}\psi_1(y) + \psi_0(x),$$

$$\psi_0(x) = \tau(x) - \tau(0) - \tau'(0)x - \frac{1}{2}x^2\tau''(0).$$

Уравнение (22) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и методом последовательных приближений найдем его явное решение в виде ряда

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\mathrm{d}\int_0^y d\eta\int_0^x Q(x,y;\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\xi, \tag{23}$$

где

$$Q(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{d}^n}{n!(3n+2)!}(x-\xi)^{3n+2}(y-\eta)^n \text{ – резольвента ядра } \frac{1}{2}(x-\xi)^2.$$

Из вида функции $Q(x,y;\xi,\eta)$ следует, что справедливы следующие равенства:

$$Q(x,y;x,\eta)=0\ \ Q_x(x,y;x,\eta)=0,\ \ Q_{xx}(x,y;x,\eta)=1,$$

$$Q(x,y;\xi,y)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2,\ \ Q_x(x,y;\xi,y)=x-\xi,\ \ Q_{xx}(x,y;\xi,y)=1.$$

Подставив значения $u_0(x,y)$ в (23) и выделяя неизвестную функцию $\tau(x)$, имеем

$$u(x,y)=\tau(x)+\int_0^x H_0(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\Phi(x,y), \tag{24}$$

где

$$H_0(x,y;\xi)=-\mathrm{d}\int_0^y Q(x,y;\xi,\eta)d\eta,$$

$$\Phi(x,y)=\psi_3(y)+x\psi_2(y)+\frac{1}{2}x^2\psi_1(y)-\tilde{\psi}_0(x)+\int_0^y H_1(x,y;\eta)\psi_3(\eta)d\eta+\int_0^y H_2(x,y;\eta)\psi_2(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y H_3(x,y;\eta)\psi_1(\eta)d\eta+\mathrm{d}\int_0^x H_4(x,y;\xi)\tilde{\psi}_0(\xi)d\xi,$$

$$H_1(x,y;\eta)=-\mathrm{d}\int_0^x Q(x,y;\xi,\eta)d\xi,\quad H_2(x,y;\eta)=-\mathrm{d}\int_0^x Q(x,y;\xi,\eta)\xi d\xi,$$

$$H_3(x,y;\eta)=-\mathrm{d}\int_0^x Q(x,y;\xi,\eta)\xi^2 d\xi,\ H_4(x,y;\xi)=\int_0^y Q(x,y;\xi,\eta)d\eta,$$

$$\tilde{\psi}_0(\xi)=\varphi_1(0)+\varphi_1'(0)\xi+\frac{1}{2}\varphi_1''(0)\xi^2.$$

4. Соотношение, полученное из области D_2. Подставив (24) в условие (11), получим соотношение, полученное из области D_2:

$$\tau(x)+\int_0^x H_0(x,-h_1;\xi)\tau(\xi)d\xi+\lambda\mu(x)=\psi(x)-\Phi(x,-h_1). \tag{25}$$

Исключив $\tau(x)$ из (20) и (25), относительно $\mu(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\int_0^l N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+F(x), \tag{26}$$

где

$$N(x,\xi)=-\frac{1}{\lambda}\left(G(x,\xi)+\int_0^x H_0(x,-h_1;t)G(t,\xi)dt\right),$$

$$F(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\psi(x) - \Phi(x,-h_1) - \alpha(x) - \int_0^x H_0(x,-h_1;\xi)\right)\alpha(\xi)d\xi.$$

Если выполняется условие

$$l \cdot \max_{0\le x,\xi \le l} \left|N(x,\xi)\right| < 1, \tag{27}$$

тогда уравнение (26) имеет единственное решение. Определив функцию $\mu(x)$ как решение уравнения (26) и подставляя её значение в (20) можем определить $\tau(x)$, и тем самым решение задачи 3.

5. Решение задачи 1 в области D_1. Как показано в пункте 2, из уравнения (12) после решения задачи (13), (14) и с учетом условий (2)–(4) получено уравнение (18). Следовательно, решение задачи 2 эквивалентно редуцируется к решению задачи Дирихле для уравнения (18) с краевыми условиями (2), (4) и (10), решение которой даётся формулой [8]

$$u(x,y) = \int_0^l G_\eta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi - \int_0^l G_\eta(x,y;\xi,\eta) f_2(\xi)d\xi + \int_0^h G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta -$$

$$-\int_0^h G_\xi(x,y;l,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta - \int_0^l d\xi \int_0^h G(x,y;\xi,\eta)\vartheta_0(\xi,\eta)d\eta, \tag{28}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4lh}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h^2n^2 + l^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{h}y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi m}{h}\eta\right)$$ – функция Грина.

Таким образом, имеет место следующая:

Теорема. Пусть выполнены условия (7), (9) и (27). Тогда решение задачи 1 существует, оно единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (28) и (24) соответственно.

Литература:

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка и уравнения смешанного типа / Дис. … докт. физ.-мат. наук, Бишкек, 1996. – 249 с.
2. Осмоналиев А.Б. Краевые задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с линией сопряжения $x = 0$ / Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, Выпуск 32. – Бишкек: Илим: 2003, – с. 228–234.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. Бекмаматов З.М. О разрешимости задачи сопряжения для одного класса уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка на плоскости. Сборник статей по материалам XLII международной научно-практической конференции. – Новосибирск, 2016. – 87с.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
6. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
7. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1982. – 336 с.
8. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.