*Искандаров С.*

# ВОЛЬТЕРР ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК МҮЧӨЛӨРДҮН ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЧЕКТЕЛИШИНЕ БОЛГОН ТААСИРИ ЖӨНҮНДӨ

*Искандаров С.*

# О ВЛИЯНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*S.Iskandarov*

# ABOUT INFLUENCE OF VOLTERRA TYPE INTEGRAL PERTURBATIONS TO BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

*УДК: 517.968.72*

*Экинчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жетиштүү шарттары табылат. Тиешелүү экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары жарым окто чектелбей калуу учурлары изилденет. Иллюстративдик мисалдар тургузулат.*

***Негизги сөздөр:*** *интегро-дифференциалдык теңдеме, дифференциалдык теңдеме, чыгарылыштардын чектелгендиги, интегралдык мүчөлөрдүн таасири.*

*Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси решений линейного вольтеррого интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Изучен случай, когда решения соответствующих линейных однородного и неоднородного дифференциального уравнения второго порядка могут быть неограниченными. Строятся иллюстративные примеры.*

***Ключевые слова:*** *интегро-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение, ограниченность решений, влияние интегральных возмущений.*

*Sufficient conditions for the boundedness on the half-axis of solutions of the linear second-order Volterra type integro-differential equation are established. The case is studied when the solutions of the corresponding linear homogeneous and inhomogeneous second-order differential equations can be unbounded. Illustrative examples are constructed.*

***Key words:*** *integro-differential equation, differential equation, boundedness of solutions, influence of integral perturbations.*

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0, t \ge \tau \ge t_0; J = [t_0, \infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение; ДУ - дифференциальное уравнение.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале $J$ всех решений следующего линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}[Q(t,\tau)x(\tau) + K(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t), \qquad (1)$$

$t \ge t_0$, в случае, когда соответствующее ДУ второго порядка

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t), \quad t \ge t_0 \qquad (1_0)$$

может иметь неограниченные на полуинтервале $J$ решения.

Заметим, что такая задача, т.е. задача о влиянии интегральных возмущений для некоторых классов ИДУ(1) и ДУ ($1_0$) изучены во многих работах, например, в [1,2, с.83-89, с.142-164]. Настоящая работа является существенным дополнением этим работам.

Для решения выше поставленной задачи применяется метод, разработанный в [3],применительно к ИДУ (1), а именно развиваются метод преобразования уравнений В.Вольтерра [4, с 194-217], метод срезывающих функций [2], метод интегральных неравенств [5], применяется лемма, которая устанавливается ниже, и являющая обобщением леммы 3.3 [2, с.111] об интегральном неравенстве первого рода.

ЛЕММА. Пусть $\psi(t) > 0,\ \psi'(t) \ge 0,\ q(t,c) \ge 0,\ q'(t,c) \ge 0,$

$0 \le c = const,\ t \ge t_0$. Тогда из интегрального неравенства первого рода

$$\left|\int_{t_0}^{t}\psi(s)x'(s)ds\right| \le q(t,c)$$

вытекает оценка

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + (\psi(t_0))^{-1}q(t_0,c) + \int_{t_0}^{t}q'(s,c)(\psi(s))^{-1}ds.$$

Эта лемма доказывается аналогично леммам 3.1-3.3 [2, с.110-111].

Переходим к получению основного результата.

Пусть [2]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n}f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)(i = 1\ldots n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, E_i(t) \equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t)\ (i = 1\ldots n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ (i = 1\ldots n)$ - некоторые функции.

Для любого решения $x(t)$ ИДУ(1) умножаем на $x'(t)$ [4,с. 194-217], интегрируем в пределах от $t_0$ до $t$, в том числе по частям, при этом учитываем условия *(K), (f),* вводим функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t),$ условие *(R)*, функции $c_i(t)$, применяем леммы 1.4,1.5 [6]. В итоге после некоторых преобразований будем иметь следующее тождество:

$$\begin{aligned}&(x'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t}a_1(s)(x'(s))^2ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t}A_i'(s)(X_i(s,t_0))^2ds +\\ &+B_i(t)(X_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}[B'(s)(X_i(s,t_0))^2ds -\\ &-2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(t)]ds + \int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2d\tau -\\ &-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2d\tau ds\} \equiv c_* + 2\int_{t_0}^{t}x'(s)\{f_0(s) - a_0(s)x(s) -\\ &-\int_{t_0}^{s}[Q(s,\tau)x(\tau) + K_0(s,\tau)x'(\tau)]d\tau\}ds,\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$X_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x'(\eta)d\eta\ \ (i = 1\ldots n),\ \ c_* = (x'(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

ТЕОРЕМА. Пусть 1) выполняются условия *(K), (f), (R)*;

$a_1(t) = a_{10}(t) + a_{11}(t),\ a_{11}(t) \geq 0;$

2) $A_i(t) \geq 0, B_i(t) \geq 0, B_i'(t) \leq 0, R_{i\tau}'(t,\tau) \geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t) \geq 0, R_i^*(t) \geq 0$ такие, что

$$A_i'(t) \leq A_i^*(t) A_i(t), (E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t), R_{it\tau}''(t,\tau) \leq R_i^*(t) R_{i\tau}'(t,\tau)$$

$(i = 1 \ldots n;\ k = 0{,}1)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верно следующее энергетическое неравенство:

$$(x'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_{11}(s)(x'(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n} [A_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2 d\tau] \leq M(t,c_*),$$

(3)

где

$$M(t,c_*) \equiv \{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{t} f_*(s) \exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s} V(\eta) d\eta) ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{t} V(s) ds),$$

$$f_*(t) \equiv \left|f_0(t)\right| + \left|a_0(t) x(t_0)\right| + \left|x(t_0)\right| \int_{t_0}^{t} \left|Q(t,\tau)\right| d\tau,$$

$$V(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} [A_i^*(t) + R_i^*(t)] + 2\{\left|a_{10}(t)\right| + \left|a_0(t)\right|(t - t_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} [\left|Q(t,\tau)\right|(\tau - t_0) + \left|K_0(t,\tau)\right|] d\tau\}.$$

Пусть, кроме того, 3) $A_j(t) \geq A_{j*}(t) > 0, \psi_j(t) > 0,\ \psi_j'(t) \geq 0\ (1 \leq j \leq n),$

$$q(t,c_*) \geq 0, q'(t,c_*) \geq 0,\ q'(t,c_*)\left(\psi_j(t)\right)^{-1} \in L^1(J,R_+)\ (1 \leq j \leq n),$$

где

$$q(t,c_*) \equiv \left(A_{j*}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(M(t,c_*)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда любое решение ИДУ(1) $x(t) = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что условия

$(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t)\ (i = 1 \ldots n;\ k = 0{,}1)$ гарантирует выполнения неравенств:

$$(-1)^k \left[B_i^{(k)}(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 - 2(E_i^{(k)}(t))^2 X_i(t,t_0) + c_i^{(k)}(t)\right] \geq 0\ (k = 0{,}1;\ i = 1 \ldots n).$$

С учетом этого факта, введя обозначение:

$$u(t) \equiv (x'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_{11}(s)(x'(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n} [A_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)\left(X_i(t,\tau)\right)^2 d\tau \Big],$$

заменяя в двух местах правой части тождества (2) $x(t)$ на:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds,$$

из тождества (2), в силу условий 1), 2) теоремы получаем следующее интегральное неравенство:

$$0 \le u(t) \le c_* + 2\int_{t_0}^{t} \{ f_*(s)\left(u(s)\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(A_i^*(s) + R_i^*(s)) + \left|a_{10}(s)\right|]u(s) + \left|a_0(s)\right|\int_{t_0}^{s}\left(u(\eta)\right)^{\frac{1}{2}} d\eta +$$

$$+2\int_{t_0}^{s}[\left|Q(s,\tau)\right|\int_{t_0}^{\tau}\left(u(\eta)\right)^{\frac{1}{2}} d\eta + \left|K_0(s,\tau)\right|\left(u(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}]d\tau\}ds. \qquad (5)$$

Применяя к интегральному неравенству (5) лемму 1[5], имеем

$$u(t) \le \{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{t} f_*(s)\exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s} V(\eta)d\eta)ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{t} V(s)ds) \equiv M(t,c_*), \qquad (6)$$

что равносильно утверждению (3) теоремы в силу обозначения (4).

Из оценки (6) или (3) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 \le M(t,c_*).$$

Отсюда с учетом обозначения $X_i(t,t_0)$ для $1 \le j \le n$ имеем

$$A_j(t)(\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)x'(\eta)d\eta)^2 \le M(t,c_*),$$

что в силу условия $A_j(t) \ge A_{j*}(t) > 0$ дает следующее:

$$|\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)x'(\eta)d\eta| \le (A_{j*}(t))^{-\frac{1}{2}}\left(M(t,c_*)\right)^{\frac{1}{2}} \equiv q(t,c_*). \qquad (7)$$

Применяя к интегральному неравенству первого рода (7) нашу лемму, с учетом условия 3) теоремы получаем:

$$\left|x(t)\right| \le \left|x(t_0)\right| + (\psi_j(t_0))^{-1} q(t_0,c_*) + \int_{t_0}^{t} q'(s,c_*)(\psi_j(s))^{-1} ds \le$$

$$\le \left|x\left(t_0\right)\right| + (\psi_j(t_0))^{-1} q\left(t_0, c_*\right) + \int_{t_0}^{\infty} q'\left(s, c_*\right)(\psi_j(s))^{-1} ds < \infty,$$

что равносильно ограниченности любого решения $x\left(t\right)$ ИДУ (1) на *J*. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы может быть $f(t) \equiv 0,$ т.е.

$f_i\left(t\right) \equiv 0 \; \left(i = 0,1\ldots n\right)$. Тогда $B_i\left(t\right) \equiv E_i\left(t\right) \equiv c_i\left(t\right) \equiv 0 \; \left(i = 1\ldots n\right),$

$R_i\left(t, t_0\right) \equiv A_i\left(t\right)\left(i = 1\ldots n\right),$ условия $A_i'(t) \le A_i^*(t) A_i\left(t\right)$ заменяться на:

$R_i'(t, t_0) \le R_i^*(t) R_i\left(t, t_0\right) \; (i = 1 \ldots n).$ Значит, интегральное возмущение типа Вольтерра может оказать влияние на ограниченность решений линейного однородного ДУ второго порядка (в ($1_0$) $f(t) \equiv 0$) и на ограниченность решений линейного неоднородного ДУ второго порядка (в ($1_0$) $f(t) \neq 0$ тождественно).

ПРИМЕР 1. Для линейного однородного ИДУ:

$$x''\left(t\right) - \frac{4}{t+1} x'\left(t\right) + \frac{6}{\left(t+1\right)^2} x\left(t\right) + \int_0^t \left[ \frac{x\left(\tau\right)}{t + \tau + 1} + K\left(t, \tau\right) x'\left(\tau\right) \right] d\tau = 0, \; t \ge 0,$$

где $K\left(t, \tau\right) \equiv \left[ \left(t + \tau + 1\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t - \tau + 2} \right] \exp\left(e^t + e^\tau\right) + \left[ \exp\left( \frac{\cos t}{t+2} \right) + \tau \right]^{\frac{1}{2}} (t +$ $+1)^3 (\sin t)^{\frac{1}{5}} \left(\tau + 1\right)^3 \left(\sin \tau\right)^{\frac{1}{5}} - \frac{100}{\left(t + \tau + 1\right)^2}$, выполняются все условия теоремы с учетом замечания, здесь $t_0 = 0, \; n = 2, \; j = 1,$

$$\psi_1\left(t\right) \equiv \exp\left(e^t\right), \; R_1\left(t, \tau\right) \equiv (t + \tau + 1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t - \tau + 2},$$

$$R_1\left(t, 0\right) = \left(t+1\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t+2} \ge 1 = A_{1*}\left(t\right) > 0, A_1^*\left(t\right) \equiv \frac{1}{t+1}, \; R_1^*\left(t\right) \equiv 0,$$

$$\psi_2\left(t\right) \equiv \left(t+1\right)^3 (\sin t)^{\frac{1}{5}}, \; R_2(t, \tau) \equiv [\exp\left( \frac{\cos t}{t+2} \right) + \tau]^{\frac{1}{2}}, \; A_2^*(t) \equiv \frac{t+3}{(t+2)^2},$$

$$R_2^*\left(t\right) \equiv \frac{3\left(t+3\right)}{2\left(t+2\right)^2}, \; K_0\left(t, \tau\right) \equiv -\frac{100}{(t + \tau + 1)^2},$$

$$f_*\left(t\right) \equiv [\frac{6}{(t+1)^2} + \ln(\frac{2t+1}{t+1})] \, |x(0)|,$$

$$V\left(t\right) \equiv \frac{1}{t+1} + \frac{t+3}{(t+2)^2} + \frac{3(t+3)}{2(t+2)^2} + 2[\frac{4}{t+1} + \frac{6t}{(t+1)^2} + t - \left(t+1\right)\ln(\frac{2t+1}{t+1}) +$$

$+\frac{100t}{\left(t+1\right)\left(2t+1\right)}$. Следовательно, все решения этого ИДУ ограничены на полуоси $R_+$. Однако, все ненулевые решения $x\left(t\right) = c_1(t+1)^2 + c_2(t+1)^3$

($c_1, c_2$ - произвольные постоянные), соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка

$$x''(t)-\frac{4}{t+1}x'(t)+\frac{6}{(t+1)^2}x(t)=0,\ t\ge 0$$

не ограничены на полуоси $R_+$.

ПРИМЕР 2. ИДУ

$$x''(t)-\frac{4}{t+1}x'(t)+\frac{6}{(t+1)^2}x(t)+$$

$$+\int_0^t\left[(t+\tau+1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t-\tau+2}\right]\exp\left(e^t+e^\tau\right)x'(\tau)d\tau=-\frac{\exp(e^t)}{t+3},\ t\ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы, здесь $t_0=0,\ n=1,$

$$\psi_1(t)\equiv\exp\left(e^t\right),\ R_1(t,\tau)\equiv(t+\tau+1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t-\tau+2},\ A_1(t)=(t+1)^{\frac{1}{3}}\ge 1\equiv A_{1*}(t),$$

$$A_1^*(t)\equiv\frac{1}{t+1},\ R_1^*(t)\equiv 0,\ B_1(t)\equiv\frac{1}{t+2},\ f_1(t)\equiv-\frac{\exp(e^t)}{t+3},\ E_1(t)\equiv-\frac{1}{t+3},$$

$$c_1(t)\equiv\frac{1}{t+2},\ K_0(t,\tau)\equiv f_0(t)\equiv Q(t,\tau)\equiv 0,\ f_*(t)\equiv\frac{6|x(0)|}{(t+1)^2},$$

$V(t)\equiv\frac{1}{t+1}+\frac{4(5t+2)}{(t+1)^2}$. Значит, все решения данного ИДУ ограничены на $R_+$. Можно показать, что все решения соответствующего линейного неоднородного ДУ:

$$x''(t)-\frac{4}{t+1}x'(t)+\frac{6}{(t+1)^2}x(t)=-\frac{\exp(e^t)}{t+3},\ t\ge 0$$

будут неограниченными на полуоси $R_+$, что следует из формулы Лагранжа.

Таким образом, нам удалось найти класс ИДУ (1) и ДУ ($1_0$), для которых выше приведенная задача решаема. Опыт построения примеров показывает, что для любого ДУ вида ($1_0$) с неограниченными решениями можно построить ИДУ (1) уже с ограниченными решениями. Это и есть влияние интегральных возмущений типа Вольтерра.

**Литература:**


1. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник КРСУ. – 2001. – Т.1, №2. – С.46-53.
2. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
3. Искандаров С. О влиянии интегральных возмущений на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка на полуоси // The abstract book of the Intern.Scientific Conf. “Weighted estimates of differential and integral operators and their applications”, 4-6 May 2017, Astana, Kazakhstan. – Astana: L.N.Gumilyov ENU, 2017. – С.178-181.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр. / Под ред. Ю.М.Свирежева. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
5. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68-103.
6. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.


**Рецензент: д.ф.-м.н., доцент Темиров Б.К.**