Сопуев А., Жээнбаев Н.А.

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КИЧИНЕ МҮЧӨЛҮҮ АРАЛАШ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

Сопуев А., Жээнбаев Н.А.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

A.Sopyev, N.A. Jeenbaev

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED FOURTH-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH LOWER TERMS

УДК: 517.956.6

Интегралдык теңдемелер жана Гриндин функциялары методдору менен төртүнчү тартиптеги кичине мүчөлүү аралаш парбола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы теоремалары далилденген.

Негизги сөздөр: *чек аралык маселе, чектик шарттар, интегралдык теңдемелер, чечимдин жашашы жана жалгыздыгы.*

Методом интегральных уравнений и функции Грина доказаны теоремы существования и единственности решений краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с младшими членами.

Ключевые слова: *краевая задача, краевые условия, интегральные уравнения, единственность и существование решения.*

The theorem of the existence and uniqueness of solutions of the boundary value problem for mixed fourth-order parabolic-hyperbolic equations with lower terms is proved by the method of integral equations and Green`s function.

Key words: *boundary value problem, boundary conditions, integral equations, uniqueness end existence of solution.*

1. Постановка задачи. В области $D=\{(x,y): 0<x<l, -h_2<y<h_1\}$ $(l,h_1,h_2>0)$ рассмотрим уравнения

$$L_1(u)\equiv u_{xxxx}+a_1(x,y)u_{xx}+b_1(x,y)u_x+c_1(x,y)u+u_y=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxxy}+a_2(x,y)u_{xx}+b_2(x,y)u_x+c_2(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

где $a_i,b_i,c_i\,(i=1,2)$ - заданные функции, а $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$.

По классификации работы [1], уравнение (1) является уравнением параболического типа, так как уравнение имеет четырехкратную действительную характеристику: $y=const$.

Уравнение (2) принадлежит гиперболическому типу, так как уравнение имеет трехкратную действительную характеристику $y=const$ и одну простую действительную характеристику $x=const$.

Краевые задачи для уравнений (1) и (2) изучены в работах [1 - 4].

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap[C^{4+0}(D_1)\cup\ \cup C^{4+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1), краевым условиям

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(l,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,\\&u_x(0,y)=\varphi_3(y),\ u_x(l,y)=\varphi_4(y),\ 0\le y\le h,\end{aligned} \tag{3}$$

а также, удовлетворяющую в области D_2 уравнение (2), краевым условиям

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\chi_1(y),\ u(l,y)=\chi_2(y),\ 0\le y\le h,\\&u_x(0,y)=\chi_3(y),\ 0\le y\le h,\end{aligned} \tag{4}$$

условиям гладкости

$$\varphi_i(y)\in C^1[0,h_1]\ (\mathrm{i}=\overline{1,3}),\ \chi_i(y)\in C^1[-\mathrm{h}_2,0]\ (\mathrm{i}=\overline{1,3}), \tag{5}$$

и условиям согласования

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_2(0)=\chi_2(0),\ \varphi_3(0)=\chi_3(0)\\&\varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\ \varphi_2'(0)=\chi_2'(0),\ \varphi_3'(0)=\chi_3'(0).\end{aligned}\tag{6}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) и (2) удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned}&a_1(x,y)\in C(\overline{D_1})\cap C^{2+0}(D_1),\ b_1(x,y)\in C(\overline{D_1})\cap C^{1+0}(D_1),\\&c_1(x,y)\in C(\overline{D_1}),\ \ a_2(x,y)\in C(\overline{D_2})\cap C^{2+0}(D_2),\\&b_2(x,y)\in C(\overline{D_2})\cap C^{1+0}(D_2),\ \ c_2(x,y)\in C(\overline{D_2}).\end{aligned}\tag{7}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}&u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ 0\le x\le l,\\&u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le l.\end{aligned}\tag{8}$$

2. Соотношения, полученные из области D_1. Устремляя у к +0 и учитывая обозначения (8) из уравнения (1) имеем

$$\tau^{(4)}(x)+a_1(x,0)\tau''(x)+b_1(x,0)\tau'(x)+c_1(x,0)\tau(x)+\nu(x)=0\,.\tag{9}$$

Из условий согласования получим краевые условия для $\tau(x)$:

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau(l)=\varphi_2(0),\tau'(0)=\varphi_3(0),\tau'(l)=\varphi_4(0)\,.\tag{10}$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$\tau^{(4)}(x)=f_1(x),\tag{11}$$

где $f_1(x)=-a_1(x,0)\tau''(x)-b_1(x,0)\tau'(x)-c_1(x,0)\tau(x)-\nu(x)$.

Рассмотрим фунцию

$$\Phi_1(x)=\left(\frac{2}{l^3}x^3-\frac{3}{l^2}x^2+1\right)\varphi_1(0)+\left(-\frac{2}{l^3}x^3+\frac{3}{l^2}x^2\right)\varphi_2(0)+$$
$$+\left(\frac{x^3}{l^2}-\frac{2}{l}x^2+x\right)\varphi_3(0)+\left(\frac{x^3}{l^2}-\frac{x^2}{l}\right)\varphi_4(0),$$

которая удовлетворяет уравнение $\Phi_1^{(4)}(x)=0$ и краевые условия

$$\Phi_1(0)=\varphi_1(0),\ \Phi_1(l)=\varphi_2(0),\ \ \Phi_1'(0)=\varphi_3(0),\ \Phi_1'(l)=\varphi_4(0).$$

Введя функцию

$$\tau(x)=\mathrm{T}(x)+\Phi_1(x)\ ,\tag{12}$$

для неизвестной функции $\mathrm{T}(x)$, получим краевую задачу:

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}^{(4)}(x)=f_1(x)\\&\mathrm{T}(0)=0,\ \mathrm{T}(l)=0,\mathrm{T}'(0)=0,\ \mathrm{T}'(l)=0,\end{aligned}\tag{13}$$

решение которого представимо в виде

$$\mathrm{T}(x)=\int_0^l G_1(x,\xi)f_1(\xi)d\xi\ ,\tag{14}$$

где $$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^2(\xi-l)^2}{6l^3}\left(3l\xi-lx-2x\xi\right),\ 0\le x<\xi,\\ \dfrac{\xi^2(x-l)^2}{6l^3}\left(3lx-l\xi-2x\xi\right),\ \xi\le x<l.\end{cases}$$

- функция Грина задачи (13).

Подставляя значение $f_1(x)$ из (12) и (14) будем иметь соотношение, полученное из области D[1]:

$$\tau(x)=\mathrm{A}(x)+\int_0^l \mathrm{K}_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi-\int_0^l G_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi\,, \tag{15}$$

где

$$\mathrm{K}_1(x,\xi)=-\left[G_1(x,\xi)a_1(\xi,0)\right]_{\xi\xi}+\left[G_1(x,\xi)b_1(\xi,0)\right]_{\xi}-G_1(x,\xi)c_1(\xi,0)\,,$$

$$\mathrm{A}(x)=-G_1(x,\xi)a_1(\xi,0)\tau'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l}+$$

$$+\left\{\left[G_1(x,\xi)a_1(\xi,0)\right]_{\xi}-G_1(x,\xi)b_1(\xi,0)\right\}\tau(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l}+\Phi_1(x).$$

3. <u>Соотношения, полученные из области D₂.</u> Устремляя y к -0 и с учетом обозначения (8) из уравнения (2) получим

$$\nu'''(x)+a_2(x,0)\tau''(x)+b_2(x,0)\tau'(x)+c_2(x,0)\tau(x)=0\,. \tag{16}$$

Для $\nu(x)$ из условий (6) получим следующие краевые условия

$$\nu(0)=\chi_1{}'(0),\nu(l)=\chi_2{}'(0),\nu'(0)=\chi_3{}'(0). \tag{17}$$

Полагая

$$\nu(x)=\mathrm{N}(x)+\Phi_2(x)\,, \tag{18}$$

где $\mathrm{N}(x)$ – новая неизвестная функция, а

$$\Phi_2(x)=\left(-\frac{x^2}{l^2}+1\right)\chi_1{}'(0)+\frac{x^2}{l^2}\chi_2{}'(0)+\left(-\frac{x^2}{l}+x\right)\chi_3{}'(0)\,,$$

придем к задаче

$$\begin{cases}\mathrm{N}'''(x)=f_2(x),\\ \mathrm{N}(0)=0,\mathrm{N}(l)=0,\ \mathrm{N}'(0)=0,\end{cases} \tag{19}$$

где $f_2(x)=-a_2(x,0)\tau''(x)-b_2(x,0)\tau'(x)-c_2(x,0)\tau(x)$.

Решение задачи (19) представимо в виде

$$\mathrm{N}(x)=\int_0^l G_2(x,\xi)f_2(\xi)d\xi\,, \tag{20}$$

где $G_2(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2l^2}(l-t)^2,\ 0\le x\le\xi\\ \dfrac{1}{2l^2}\left[x^2(l-t)^2-l^2(x-t)^2\right],\ \xi\le x\le l\end{cases}$ - функция Грина.

Из (18) и (20) будем иметь соотношение, полученное из области D_2:

$$\nu(x) = \Phi(x) + \int_0^l \mathrm{K}_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\,, \tag{21}$$

где

$$\mathrm{K}_2(x,\xi) = -\left[a_2(\xi,0)G_2(x,\xi)\right]_{\xi\xi} + \left[b_2(\xi,0)G_2(x,\xi)\right]_{\xi} - c_2(\xi,0)G_2(x,\xi),$$

$$\Phi(x) = \Phi_2(x) - a_2(\xi,0)G_2(x,\xi)\tau'(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} +$$

$$+\left[a_2(\xi,0)G_2(x,\xi)\right]_{\xi}\tau(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l} - b_2(\xi,0)G_2(x,\xi)\tau(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=l}.$$

4. Сведение задачи к решению интегрального уравнения. Исклю-чая $\nu(x)$ из соотношений (15) и (21) для $\tau(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \int_0^l \mathrm{K}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\,, \tag{22}$$

где $\mathrm{K}(x,\xi) = \mathrm{K}_1(x,\xi) - \int_0^l G_1(x,t)\mathrm{K}_2(t,\xi)dt$, $\tau_0(x) = \mathrm{A}(x) - \int_0^l G_1(x,\xi)\Phi(\xi)d\xi$.

Если выполняется условие

$$l\cdot\max_{\forall x,\xi\in\bar{Q}}\left|\mathrm{K}(x,\xi)\right| < 1, \tag{23}$$

где . $Q = \left\{(x,\xi):\ 0 < x < l,\ \ 0 < \xi < l\right\}$, то интегральное уравнение (22) имеет единственное решение и это решение может быть получено методом последовательных приближений.

5. Построение решения задачи 1. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}_2) \cap C^{4+1}(D_2)$, удовлетворящую уравнению (2), краевым условиям

$$u(0,y) = \chi_1(y),\ u_x(0,y) = \chi_3(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_4(y), \tag{24}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le l\,, \tag{25}$$

где $\chi_4(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение этой задачи можно представить через функцию Римана в виде [1]

$$u(x,y) = \tau(x) - \int_0^x v_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^y [v(x,y;0,\eta)\chi_4{}'(\eta) - v_\xi(x,y;0,\eta)\chi_3{}'(\eta) + a_2(0,\eta)v(x,y;0,\eta)\chi_3(\eta) + \tag{24}$$

$$+v_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\chi_1{}'(\eta) + E(x,y,\eta)\chi_1(\eta)]d\eta,$$

где $E(x,y,\eta) = -a_2(0,\eta)v_\xi(x,y;0,\eta) + [b_2(0,\eta) - a_{2\xi}(0,\eta)]v(x,y;0,\eta)$.

Функция $v(x,y;\xi,\eta)$ – является решением следующей задачи:

$$L^*(v) \equiv v_{\xi\xi\xi\eta} + (a_2 v)_{\xi\xi} - (b_2 v)_\xi + c_2 v = 0,, \tag{25}$$

$$\begin{cases} v(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0, \quad y\le\eta\le 0, \\ v_{\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0, \quad y\le\eta\le 0, \\ v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=1, \quad y\le\eta\le 0, \\ v(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\frac{1}{2}(\xi-x)^2, \quad 0\le\xi\le x. \end{cases} \tag{26}$$

Методом интегрирования, разрешимость задачи (25), (26) эквивалентно сведем к решению интегрального уравнения Вальтера второго рода

$$v(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\xi-x)^2+\int_x^{\xi}d\xi_1\int_y^{\eta}\mathrm{K}_3(\xi,\eta_1;\xi_1)v(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1\,, \tag{27}$$

где $\mathrm{K}_3(\xi,\eta_1;\xi_1)=-a_2(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)b_2(\xi_1,\eta_1)+\frac{1}{2}(\xi-\xi_1)^2c_2(\xi_1,\eta_1)$,

которая однозначно разрешима.

Используя второе условие (4 из (24) для неизвестной функции $\chi_4(y)$, получим уравнение

$$\int_0^y v(l,y;0,\eta)\chi_4'(\eta)d\eta=\mathrm{X}_1(y)\,, \tag{28}$$

где

$$\mathrm{X}_1(y)=\chi_2(y)-\tau(l)+\int_0^l v_{\xi\xi\xi\xi}(l,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi+\int_0^y[v_{\xi}(l,y;0,\eta)\chi_3'(\eta)-$$

$$-a_2(0,\eta)v(l,y;0,\eta)\chi_3(\eta-v_{\xi\xi}(l,y;0,\eta)\chi_1'(\eta)-\mathrm{E}(l,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta.$$

Интегрируя по частям из (28) получим

$$v(l,y;0,y)\chi_4(y)=\int_0^y v_{\eta}(l,y;0,\eta)\chi_4(\eta)d\eta+\mathrm{X}_1(y)\,. \tag{29}$$

Если учесть, что $v(l,y;0,y)=\frac{1}{2}l^2>0$, то уравнение (29) является интегральным уравнением Вальтера второго рода и имеет единственное решение. Определив из (29) $\chi_4(y)$ и подставляя найденное значение в (24), получаем представление решение задачи 1 в области D_2.

Построение решения задачи 1 в области D_1 рассмотрена в работе [2].

Таким образом доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (5) - (7) и (23), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. - Ташкент: ФАН, 1979. - 238 с.
2. Cattabriga L. Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. - 1958. tome 28. – P. 376-401.
3. Абдиназаров С. Об одной краевой задаче для уравнения четного порядка с кратными характеристиками // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. – Ташкент: Фан, 1987. – С.133-147.
4. Сопуев А., Асылбеков Т.Д. Функция Римана и представление общего решения гиперболических уравнений четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1998. – Вып. 27. - С. 276-280.

Рецензент: д.ф.-.м.н., профессор Алымкулов К.