Тампагаров К.Б.

ФУНКЦИЯЛАРЫ АНАЛИТИКАЛЫК БОЛГОН СИНГУЛЯРДУУ ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК КАТМАР СЫЗЫКТАРДЫН ФОРМАЛАРЫ

Тампагаров К.Б.

ФОРМЫ ПОГРАНСЛОЙНЫХ ЛИНИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

K.B. Tampagarov

FORMS OF BOUNDARY LAYER LINES FOR SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH ANALYTIC FUNCTIONS

УДК: 517.928

В данной работе показаны многообразие формы погранслойных линий и их зависимость от начального условия. В ранних работах автора было введено понятие погранслойная линия для сингулярно возмущенных уравнений. Доказано, что такие линии естественным образом возникают и их можно рассматривать как специфическое свойство таких уравнений. Также получены уравнения погранслойных линий.

***Ключевые слова**: направления погранслойной линии, регулярная и сингулярная область, точка ветвления.*

Бул макалада чектик катмар сызыктардын формаларынын көп түспөлдөрү жана баштапкы шарттан көз каранды экендиги көрсөтүлдү. Автордун мурдагы макалаларында сингулярду дүүлүккөн теңдемелер үчүн чектик катмар сызык жөнүндө түшүнүктөр киргизилген. Мындай сызыктар табигый түрдө пайда болушу далилденген жана аларды теңдемелердин негизги касиеттери катары кароого болот. Ошондой эле чектик катмар сызыктардын теңдемелери алынган.

***Негизги сөздөр:** чектик катмар сызыктын багыттары, регулярдык жана сингулярдык аймак, бутактануу чекити.*

In this paper we show the diversity of the form of the boundary layer lines and their dependence on the initial condition. In the early works of the author the concept of a boundary layer line for singularly perturbed equations was introduced. It is proved that such lines naturally arise and can be considered as a specific property of such equations. Equations of the boundary layer lines are also obtained.

***Key word**: direction of the boundary layer regular and singular domain branch paint.*

Введение

Впервые в [1] для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями обнаружена линия в форме петли, названная авторами простирающимися пограничными слоями. Далее в [4] доказано, что такие линии естественным образом возникают для сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями, что можно рассматривать, как специфическое свойство таких уравнений. Было предложено назвать их-погранслойными линиями.

Постановка задачи

Пусть рассматривается уравнение с положительным малым параметром ε при производной следующего вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = f(\varepsilon, t, z(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{2}$$

где $t \in \Omega$ - односвязная область в C- множество комплексных чисел; $t_0 \in \Omega$ и её внутренняя точка; $z^0 \in C, f(\varepsilon,t,z) \in Q(H = \{(t,z) t \in \Omega,\ |z| \le \delta - \text{некоторая положительная постоянная}\})$ - означает пространство аналитических функций в области H. Отсюда следует, что функция $f(\varepsilon,t,z)$ является аналитической по переменным t и z.

Будем считать, что функция $f(\varepsilon,t,z)$ непрерывна по ε.

Из [2] заимствуем следующие определения

Определение 1. Если $z(t_1,\varepsilon)$ ограничено при $\varepsilon \to 0$, то будем называть точку t_1 регулярной для задачи (1)-(2), в противном случае – нерегулярной (сингулярной).

Определение 2. Точку, в любой окрестности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки, будем называть погранслойной точкой.

Определение 3. Любое множество регулярных (погранслойных) точек будем называть регулярным (погранслойным) множеством (областью) (РО).

Определение 4. Любое множество сингулярных точек будем называть сингулярным множеством (область).

Пусть

$$f(\varepsilon, t, z(t,\varepsilon)) \equiv a(t)\, z(t,z).$$

Тогда в место (1)-(2) имеем

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)\, z(t,\varepsilon), \tag{3}$$

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0 \tag{4}$$

В [2] для упрощенная исследования применена замена, аналогичная переходу от “фазовых координат” к энергии и получена уравнение погранслойной линии в интегральной форме

$$\int_o^{t(s)} a(\tau)d\tau = \pm is, \quad s \in R = [0,+\infty) \tag{5}$$

Для общего случая получить урвнение погранслойной линии в форме (5) не удается.

В [3] предложены другие методы определения погранслойных линий. В [4] разработан алгоритм приближенного поиска погранслойных линий с точками ветвления. Далее в работе [5] используя методы предложенные в работе [3] доказаны локальные теоремы существования погранслойных линий.

Как показывают проведенные исследования, в общем случае доказать существование погранслойных линий для некоторой области $\Omega \subset C$ имеющего глобальный характер, практически является весьма сложной задачей. Говоря о глобальном характере погранслойной линии мы имеем в виду то, что она является единственой в области Ω (проходящая через точку t_0).

Основная цель этой работы показать многообразие форм погранслойных линий и их зависимость от начального значения t_0.

Решение задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим следующие примеры.

I. Пусть $a(t) \equiv 1$. Тогда решение задачи (3)-(4) можно представить в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 exp\frac{t-t_0}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Здесь и далее будем ститать $t = t_1 + it_2$, $t_0 = t_{10} + it_{20}$, где t_1, t_2 - действительные переменные, t_{10}, t_{20} - действительные числа; $i = \sqrt{-1}$.

Учитывая (5) получим следующее уравнение

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = t - t_0 = \pm is. \tag{7}$$

Уравнение (7) распадается на два уравнения

$$t_1 - t_{10} = 0, \quad t_2 - t_{20} = \pm s \tag{8}$$

В (8) первое уравнение является уравнением кривой определяющей погранслойную линию, а вторая направление погранслойной линии.

Для рассматриваемого случая погранслойную линию определяет прямая $t_1 = t_{10}$, которая имеет две направления от точки t_0.

Непосредственные вычисления показывают истинность изложенных подтверждений. Действительно введем следующие обозначания

$$C_1 = \{t \in C | t_1 < t_0, -\infty < t_2 < +\infty\},$$

$$C_2 = \{t \in C | t_1 > t_0, -\infty < t_2 < +\infty\}.$$

Если $t_1 = t_{10}$, то

$$z(t,\varepsilon) = z^0 exp\frac{i(t_2 - t_{20})}{\varepsilon} \tag{9}$$

Функция (9) при $\varepsilon \to 0$ предела не имеемт, но

$$|z(t,\varepsilon)| = |z^0|.$$

Если $t \in C_1$, тогда

$$|z(t,\varepsilon)| = |z^0| exp\frac{t_1 - t_{10}}{\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Если $t \in C_2$, тогда

$$|z(t,\varepsilon)| = |z^0| exp\frac{t_1 - t_{10}}{\varepsilon} \to +\infty \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что C_1 – регулярная, а C_2 – сингулярная область.

Таким образом в любой окресности точки, принадлежащей прямой $t_1 = t_{10}$, содержатся регулярные так и сингулярные точки. Тогда согласно определениям 1- 4 прямая $t_1 = t_{10}$ определяет погранслойную линию.

II. Пусть $a(t) = 2t$. Задача (3)-(4) имеет следующее решение

$$z(t,\varepsilon) = z^0 exp\frac{t^2 - t_0^2}{\varepsilon}.$$

Уравнение погранслойной линии имеет вид

$$t^2 - t_0^2 = \pm is.$$

Отсюда

$$t_1^2 - t_2^2 - t_{10}^2 + t_{20}^2 = 0 \quad (10.1)$$

$$2t_1; t_2 - 2t_{10}t_{20} = \pm s \quad (10.2)$$

Как и в предыдущем случае (10.1.) определяет погранслойную линию, а (10.2) направления погранслойной линии.

Для выяснения формы погранслойной линии введем в рассмотрение функцию

$$F_1(t_1,t_2) = t_1^2 - t_2^2.$$

Линия уровня

$$(L_0) = \left\{(t_1,t_2) \in C \middle| t_1^2 - t_2^2 = 0\right\}$$

имеет точку ветвления (0;0).

(L_0) всю плоскость разбивает на четыре части, которые назавём секторами. Сектор содержащий положительную часть действительной оси обозначим Ω_1, далее против часовой стрелки оставщиеся сектора $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$.

Будем считать что сектора $\Omega_j (j = 1,2,3,4)$ не содержат линию уровня (L_0).

Рассмотрим следующие случаи

1. Пусть $t_0 = 0$. Тогда погранслойная будет разветвляющейся и имеет четыре направления. Каждая ветвь представляется лучом выходящим из точки (0;0).
2. Пусть $t_0 \in \Omega_1$ или $t_0 \in \Omega_3$. Для этого случая две ветви гиперболы, определяемые уравнением (10.1), являются погранслойными линиями и они принадлежат секторам Ω_1 и Ω_3.

Аналитично рассматриваются случаи $t_0 \in \Omega_2$ или $t_0 \in \Omega_4$.

III.Пусть $a(t) = \frac{1}{t}$ и $t_0 \neq 0$.

Решение задачи (3)-(4) можно представить в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 exp\frac{1}{\varepsilon}(ln\frac{t}{t_0}).$$

В рассматриваемом случае уравнение

$$ln\left|\frac{t}{t_0}\right| = 0$$

определяет погранслойную линию. В развернутом виде уравнение погранслойной линии имеет вид

$$t_1^2 + t_2^2 = t_{10}^2 + t_{20}^2.$$

Таким образом окружность с центром в точке (0;0) и радиуса $\sqrt{t_{10}^2 + t_{20}^2}$ является погранслойной линией.

Отметим, что область

$C_1 = \{t \in C \| t| < |t_0| \text{ и } t \neq 0\} -$ регулярная $\qquad C_2 = \{t \in C \| t| > |t_0| \}$ – сингулярная.

Вывод. Рассмотренные примеры подтверждают существование погранслойных линий, имеющих различные формы.

Литература:

1. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р., Явление простирающегося симметричного пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости //Вестник ЖАГУ- Жалал-Абад, 2008г. №1. – с.122-126.
2. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р., Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями// Вестник ОшГУ – Ош, 2013г. – с.227-231.
3. Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Характеризующие функции и топология комплексных областей //Материалы V конгресса тюркского мира. – Бишкек, 2014г. – с.65.
4. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Алгоритм приближенного поиска погранслойных линий с точками ветвления для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. /Доклады Национальной академии наук КР. – Бишкек, 2015, №2 – с.15-18.
5. Тампагаров К.Б. Погранслойные линии для сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическими функциями //Естественные и математические науки в современном мире №10 (45), Россия, Новосибирск Изд.АНС СиБАК. 2016г. – с.67-73.

Рецензент: д.-ф.м.н., профессор Алымкулов А.К.