Темиров Б.К., Баратова Б.Ш., Матанова К.Б.

m – КААЛАГАНДАЙ ТАРТИПТЕГИ ТАК ЧЕКТЕЛГЕН АЙЫРМАЛУУ, СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРО-АЙЫРМАЛУУ ТЕҢДЕМЕНИН АЙРЫМ БИР КЛАССЫНЫН ЧЕЧИМДЕРИНИН ТЕРМЕЛҮҮСҮ

Темиров Б.К., Баратова Б.Ш., Матанова К.Б.

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ m – ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКОВ

B.K. Temirov, B. Sh. Baratova, K.B. Matanova

OSCILLATION OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE FINITE DIFFERENCE m – ARBITRARY ODD-ORDER

УДК:529.21.57

Макалада m- каалагандай так сандагы тартиптеги чектүү айырмалар менен болгон сызыктуу эмес интегро-айырмалуу тендемелердин чыгарылыштарынын термелүүсү үчүн жеткиликтүү шарттар тургузулган. Мындай теңдемелер ар түрдүү системалардын чыныгы процесстерин сүрөттөөдө, атап айтканда, биологиялык, экономикалык жана башка тармактарда, көп колдонулат. Ошондой эле математикалык физиканын ар кандай маселелеринин болжолдуу чыгаруу үчүн ЭЭМди колдонуп айрым теоретикалык маселелерди чечүү үчүн колдонулат.

***Негизги сөздөр**: осцилляция, сызыктуу эмес интегралдык мүчө, Йенсендин барабарсыздыгы.*

В статье установлены достаточные условия осцилляции решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков. Такие уравнения широко применяются при описании реальных процессов различных систем, в частности, биологических и экономических и других. А также для решения некоторых теоретических вопросов с применением ЭВМ для приближенного решения различных задач математической физики.

***Ключевые слова:** осцилляция, нелинейный интегральный член, неравенство Иенсена.*

In the article sufficient conditions for oscillation of solutions of a nonlinear integro-difference equation with finite differences of m-arbitrary odd orders are established. Such equations are widely used in describing the real processes of various systems, in particular, biological and economic and others. And also they are used for solving some theoretical problems with the use of computers for the approximate solution of various problems of mathematical physics.

***Key words:** oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.*

Введение

Быков Я.В. изучил осцилляционные свойства решений различных классов нелинейных, интегро-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. С Я.В. Быковым и Б.К.Темировым ранее были установлены достаточные условия осциллируемости решений интегро-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного m-четного порядков. Вопрос осцилляции решений уравнений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m - произвольного нечетного порядков ранее не изучался. В данной статье устанавливается, достаточное условие осцилляции решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m - произвольного нечетного порядков и будет показано влияние на осцилляции решений нелинейного члена.

Подстановка задачи: Установить коэффициентные критерии осцилляции решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков.

Рассмотрим уравнение вида

$$L_m[U(n,x)] + A(n,x)U(n,x) + \int_Q K(n,x,y)U(n,y)dy + f[n,x,U(n,x)] = 0 \tag{1}$$

где $m - не$четное произвольно заданное число $\forall\ (n,x) \in \overline{D_0},\ \forall\ z > 0\ \ f(n,x,z) \geq 0,\ \ f(n,x,-z) \leq 0.$

В этом случае достаточных условий осцилляции решений линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m-произвольного нечетного порядков рассмотрены в (5).

Пусть $P_k(n) > 0\ \ \forall\ n \geq n_0\ (k = \overline{2,m})$ - заданные функции.

Введем следующие обозначения:

$L_1(v) = \Delta\, v(n) = v(n+1) - v(n);$ $\quad W_2(n) = P_2(n)L_1(v);$ $\quad q_k(n) = \frac{1}{P_k(n)}, k = \overline{2,m};$

$L_2(n) = \Delta\{P_2(n)L_1(n)\};$ $\quad W_3(n) = P_3(n)L_2(v);$

$L_3(n) = \Delta\{P_3(n)L_2(n)\};$ $\quad W_4(n) = P_4(n)L_3(v);$

$L_k(n) = \Delta\{P_k(n)L_{k-1}(n)\};$ $\quad W_k(n) = P_k(n)L_{k-1}(v);\ k = \overline{2,m};$

Очевидно, что $\quad W_k(n) = P_k(n)L_{k-1}(v) = P_k(n)\Delta W_{k-1}(n), \quad k = \overline{3,m};$

В дальнейшем всюду будем предполагать, что 1) $\sum^{\infty} q_k(s) = \infty;\quad k = \overline{2,m};$
2) $\varphi(z) > 0$ $-$ непрерывная функция $\forall\, z > 0;$

В уравнении (1) $L_k[U(n,x)]$ рассмотрена, когда $P_{m-1}(n) = 1 > 0\ \forall n \ge n_0$ как заданные функции. В дальнейшем будем исходить из определений данной в [1].

Определение 1. Всякую функцию $U(n,x)$, определенную в области $\bar{D}_0 = \{n \ge n_0, x \in \bar{Q}\}$ называют правильной.

Определение 2. Правильную функцию $U(n,x)$ называют положительной {отрицательной}, если $\exists n_1 \ge n_0$ такое, что $\forall (n,x) \in D_1 = \{n \ge n_1, x \in Q\}$, $U(n,x) > 0\{U(n,x) < 0\}$

Определение 3. Правильную функцию $U(n,x)$ называют неосциллирующей, если она либо не положительна, либо не отрицательно. В противном случае ее называют осциллирующей.

Всюду предполагается: 1) $Q \in R^m$ -открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q$; 2) n-натуральное число; 3) $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in Q$; 4) $A_1(n,x)$ - непрерывные функции по $x \in Q$ для каждого фиксированного натурального числа $n \ge n_0$; 5) $a(n)$ - заданная функция натурального аргумента $\forall\, n \ge n_0$.

Скажем, что выполнены: 1) условия (E_0), если $\forall\, (n,x,y) \in D_0^0, A(n,x) \ge a(n) \ge 0,\ K(n,x,y) \ge 0;$
2) условие (E_1), если $\forall\, (n,x,y) \in D_0^0, A(n,x) \ge 0;$

$K(n,x,y) \ge \alpha(n,x) \ge 0,\ \int_Q \alpha(n,x)dx \ge a_1(n) \ge 0.$ 3) условие (T_1), если $f(n,x,z) \ge g_0(n)\varphi(z)$, $f(n,x,-z) \le -g_0(n)\varphi(z)$, где $g_0(n) \ge 0$, $\varphi(z) > 0$.

Теорема Иенсена. [7]. Пусть 1) f(z)- непрерывная выпуклая на (0, ∞) функция (дважды дифференцируемая на (0, ∞)), функция f(x) является выпуклой на этом интервале тогда и только тогда, когда 1) $f''(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in (0,\infty)$; 2) Ф(x) непрерывная положительная функция, непрерывная по переменным группы x. Тогда имеет место неравенство $\int_Q \phi(x) f[U(n,x)]dx \ge f\{\int_Q \phi(x)U(n,x)dx\}$

Это соотношение называют неравенство Иенсена. Доказательство теоремы приведены в работе [2].

Лемма 1. Пусть 1) $\sum^{\infty} a(s) = \infty;$ 2) m $-$ четное число. 3) $\varphi(z)$ $-$ непрерывная функция $\forall\, z > 0$.Тогда неравенство

$$L_m[v(n)] + a(n)\varphi[v(n)] \le 0 \tag{2}$$

не имеет положительного решения.

Доказательство. Предположим, что неравенство (2) имеет положительное решение $v(n), \forall\, n \ge n_1$. Тогда $\Delta\, W_m(n) \le 0$. Следовательно, $W_m(n)$ $-$ невозрастающая функция. Здесь логически возможны только следующие допущения:1) либо $\exists\, n_2 \ge n_1$ такое, что $w(n_2) = c < 0$;2) либо $W_m(n) \ge 0, \forall\, n \ge n_1$. Рассмотрим первый случай. Докажем, что это предположение противоречит неравенству $v(n) > 0, \forall\, n \ge n_1$. Как нам известно, что имеем неравентсво

$$W_m(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \le c < 0 \qquad \forall\, n \ge n_2.$$

Следовательно:

$W_{m-1}(n) \leq W_{m-1}(n_2) + c\sum_{s=n_2}^{n-1} q_m(s) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Отсюда следует, что $\exists\, c_1 < 0$, $\exists\, n_3 \geq n_2$ такие, что $W_{m-1}(n) \leq c_1 < 0, \quad \forall\, n \geq n_3$.

Продолжая аналогию такие же рассуждения получим, что $\exists\, c_1 < 0, \exists\, n^1 \geq n^0$ такие, что

$$W_2(n) \leq c_0 < 0 \qquad \forall\, n \geq n^1$$

$$P_2(n)\Delta v(n) \leq c_0 < 0 \qquad \forall\, n \geq n^1$$

$$\Delta\, v(n) \leq c_0 q_2(n);$$

Суммируя это неравенство от n^1 до $n-1$, получим

$v(n) \leq v(n^1) + c_0\sum_{m=n^1}^{n-1} q_2(m) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Последние соотношения противоречить неравенству $v(n) > 0, \forall\, n \geq n_1$.

Следовательно, первое предположение несостоятельно.Рассмотрим второй случай.

$W_m(n) = P_m(n)\Delta\, W_{m-1}(n) \geq 0 \qquad \forall\, n \geq n_1$.

$W_{m-1}(n)$ - неубывающая функция $\forall\, n \geq n_1$. В этом случае логически возможны только следующие предположения:

1)либо $\exists\, n_2 \geq n_1$ такое, что $W_{m-1}(n_2) = c > 0$

2) либо $W_{m-1}(n) \leq 0 \quad \forall\, n \geq n_1$.

Рассмотрим первый случай

$W_{m-1}(n) = P_{m-2}(n)\Delta\, W_{m-2}(n_2) = c > 0 \qquad \forall\, n \geq n_2,$

$W_{m-2}(n) \geq W_{m-2}(n_2) + c\sum_{s=n_2}^{n-1} q_{m-1}(s) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $\exists\, c > 0, \exists\, n_3 > n_2$ такие, что $W_{m-2}(n) \geq c_2$, $\forall\, n \geq n_2$

Продолжая рассуждать аналогично, получим , что $\exists\, c_0 > 0, \exists\, n^0 \geq n_0$ такие, что

$$W_2(n) = P_2(n)\Delta\, v(n) \geq c_0.$$

Тогда $v(n) \geq v(n^0) = \gamma$. С учетом этого неравенства из (2) имеем

$\Delta\, W_m(n) + a(n)\beta \leq 0 \quad \forall\, n \geq n^0; \quad \beta = \varphi(\gamma)$.

С учетом, что $W_m(n) \geq 0$, $\forall\, n \geq n_1$. Последние неравенство противоречит условию а) леммы 1. Поэтому, предположении противоречит условиям леммы. Следовательно, верно предположение

в) $W_{m-1}(n) \leq 0, \forall\, n \geq n_1$, $W_{m-1}(n) = P_{m-1}(n)\Delta\, W_{m-2}(n) \leq 0, \quad \forall\, n \geq n_1$

$W_{m-2}(n)-$ невозрастающая функция $\forall\, n \geq n_1$. Логически возможны, только следующее предположение: 1) либо $\exists\, n_2 \geq n_1$ такое, что $W_{m-2}(n_2) = c < 0$, $\forall\, n \geq n_2$; 2) либо $W_{m-2}(n) \geq 0$, $\forall\, n \geq n_1$

Предположение1) противоречит неравенству, что $v(n) > 0, \forall\, n \geq n_1$. Следовательно, $W_{m-2}(n) \geq 0$, $\forall\, n \geq n_1$.

Аналогично рассуждая, получим, что $W_2(n) \geq 0$, $\forall\, n \geq n_1$

Отсюда вытекает, что $v(n) \geq v(n_1) \equiv c_0 > 0$.

С учетом этого неравенства, из неравенство (2) имеем

$\Delta\, W_m(n) + c\, a(n) \leq 0, \quad c = \varphi(c_0) \quad \forall\, n \geq n_1$

Суммируя это неравенство от n_1 до $n-1$, получим

$W_m(n) + c\, \sum_{m=n_1}^{n-2} a(m) \leq W_m(n_1)$, $\forall\, n \geq n_1$.

Так как $W_m(n) > 0$, то усиливая неравенство получим

$$c\sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1)$$

противоречащее условию 1) леммы1.

Лемма 2. Если 1) $\sum^{\infty} a(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ - непрерывная неубывающая функция $\forall\, z > 0$; 3) m - нечетное число, то для положительного решения $v(n)$ неравенства (2) имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (1) имеет положительное решение $v(n) > 0$, $\forall\, n \geq n_1$. Далее будем рассуждать почти также, как и при доказательстве леммы1 показывается, что $\forall\, n \geq n_1$. $W_m(n) \geq 0, W_2(n) \leq 0$. Отсюда вытекает, что 1) $v(n)$ - невозрастающая функция $\forall\, n \geq n_1$

2) $\exists \lim_{n\to\infty} v(n) = c > 0$.

Допустим, что $c \neq 0$. Тогда $\forall\, n \geq n_1$, $\varphi[v(n)] \geq \varphi(s) \equiv c_0 > 0$. С учетом этого неравенства из неравенство (2) имеем

$\Delta\, W_m(n) + c_0 a(n) \leq 0, \quad \forall\, n \geq n_1$

Так как $W_m(n) \geq 0$, $\forall\, n \geq n_1$, то это неравенство противоречит условию 1) леммы2. Следовательно, предположение $c \neq 0$ приводит к противоречию. Поэтому $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.

Теорема 1. Если 1) выполнены условия $(E_0), (E_1)$ и (T_1); 2) $\varphi(z) \geq c_0 = const > 0$, $\forall\, z > 0$; 3)m −нечетное число. 4) $\sum^{\infty} g_0(m) = \infty$, то все правильные решения уравнения (1) либо осциллируется, либо $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Доказательство Допустим, что уравнения (1) имеет неосциллирующее решение $U(n,x)$.Тогда неравенство

$$L_m[y(n)] + c_0 g_0(n) \leq 0 \tag{3}$$

имеет положительное решение. Это положительные решение является неубывающей функцией и $\Delta^{m-1}\, y(n) \geq 0, \forall\, n \geq n_1$.

Суммируя и усиливая неравенство (2), получим, неравенство

$$c_0 \sum_{m=n_2}^{n-1} g(m) \leq \Delta^{m-1} y(n_2)$$

противоречащее условию 4) теоремы и учетом леммы(2).

вытекает, что уравнение (1) либо осциллируется, либо $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Теорема 2. Пусть 1) выполнены условия $(E_0), (E_1)$ и (T_1); 2) $\varphi(z)$ − непрерывная возрастающая выпуклая функция на $(0, \infty)$; 3) $\sum^{\infty} g_0(m) = \infty$. Тогда все правильные решение либо осциллирует либо $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $U(n,x)$. Тогда $U(n,x)$. 1) либо неотрицательная, 2) либо неположительная функция. Рассмотрим первый случай (второй приводится к первому) $U(n,x) \geq 0$, $\forall\, (n,x) \in D_1$,

Введем обозначения $\Phi_1(x) = \frac{1}{mess\, Q}$.Тогда по теореме Иенсена

$$\int_Q \Phi_1(\mathrm{x})\varphi[U(n,x)]dx \geq \varphi\Big(\int_Q \Phi_1(x)U(n,x)dx\Big) = \varphi[v(n)],$$

де $v(n) = \int_Q \Phi_1(x)U(n,x)dx$ из тождества (1), учитывая это неравенство, умножая на $\Phi(x)$,интегрируя и учитывая теорему Йенсена, получим

$$L_m[v(n)] + g_0(n)\varphi[v(n)] \leq 0$$

Следовательно, неравенство

$$L_m[y(n)] + g_0(n)\varphi[y(n)] \leq 0 \tag{4}$$

имеет положительное решение $y(n) = |v(n)|$ и для положительного решения $y(n)$ неравенство (4) на основе леммы 2 имеет место $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$. либо уравнение (1) имеет осциллирующее решение. Если $U(n,x)$ − неположительная функция, то неравенство (4) имеет положительное решение $y(n) = -v(n)$. Положительное решение $y(n)$ является убывающей функцией. Поэтому $\exists\, n_2 \geq n_1$ и $\exists\, c_2 > 0$, такие, что $\varphi[y(n) \geq c_2 > 0\ \ \forall\, n \geq n_2$

С учетом этого неравенства из (4) имеем

$$L_m[y(n)] + c_2 g_0(n) \leq 0 \quad \forall\, n \geq n_2$$

Это противоречит условию 4) теоремы.

Литература:

1. Быков Я. В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. - Фрунзе: Илим, 1985-263с.
2. Быков. Я. В., Мерзлякова Г. Д., Шевцов Е. И. Об осцилляторности решений нелинейных разностных уравнений// Дифференциальные уравнения. -1975.-Т.2, N8.-С.1460-1473.
3. Темиров Б. К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями третьего и высшего порядков (монография).- Бишкек: Maxprint, 2014,-177с.
4. Шарифова Т. О колеблемости решений некоторых разностных уравнений// Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 1974.- Вып. 23. – с 35-43.
5. Темиров Б. К. Осцилляция решений нелинейного интегро - разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка// Труды межд. конференции “Программные системы: теория и приложения” института программных систем РАН г. Переелавль- Залесский. 2006. С. 379-387.
6. Темиров Б.К. Признак осцилляции решений линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями *m*-произвольного нечетного порядков. Известия АН Республики Казахстан Серия физико-математическая
7. Харди Н.Г.,Литтльвуд Дж.Е. и Полиа Г. Неравенство.-М.:НИЛ,1946.-456с

Рецензент: д.ф-м.н., профессор БайзаковА.Б.