Курбанбаева Н.Н.

E_4 ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КЫЙМЫЛСЫЗ ТҮЗ СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Курбанбаева Н.Н.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ПРЯМЫХ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_4

N.N. Kurbanbaeva

EXISTENCE OF IMMOVABILITY LINES OF A PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE E_4

УДК: 514.75

E_4 мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын ушундай көптүгү каралган: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана сызыгы өтөт. Ω аймагында ортонормаланган кыймылдуу $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3,4) репери берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынган. $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Френенин торчосун Σ_4 түзүшөт. Бул торчонун ω^4 сызыгынын $(X, \vec{e}_4)$ жанымасында F_4^3 чекити жашайт. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде, F_4^3 чекити өзүнүн $\Omega_4^3 \subset E_4$ аймагын сызып чыгат. Натыйжада $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз: $f_4^3(X) = F_4^3$.

$(X, \vec{e}_1)$, $(X, \vec{e}_2)$ түз сызыктары $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ бөлүктөп чагылтуусунда кыймылсыз болуштарынын зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Негизги сөздөр: *Френенин точосу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, бөлүктөп чагылтуу, кыймылсыз түз сызык.*

Рассмотрено семейство гладких линий в области Ω евклидова пространства E_4 так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3,4) в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4. На касательной к линии ω^4 сети Френе инвариантным образом определяется точка $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_4^3 описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_4$. Получается частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f_4^3(X) = F_4^3$.

Найдены необходимое и достаточные условия для того, чтобы прямые $(X, \vec{e}_1), (X, \vec{e}_2)$ являлись неподвижными в частичном отображении f_4^3.

Ключевые слова: *Сеть Френе, циклическая сеть Френе, псевдофокус, частичное отображение, неподвижная прямая.*

In the domain $\Omega \subset E_4$ it is considered a set of smooth lines such that through the point $X \in \Omega$ passed one line of given set. The moving orthonormal frame $R = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net Σ_4 of Frenet. There exists a point $F_1^4 \in (X, \vec{e}_4)$ on the tangent of the line ω^4. When the point X shifted in the domain Ω, the point F_4^3 describes it's domain Ω_4^3 in E_4. It is defined a partial mapping $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ such that $f_4^3(X) = F_4^3$.

The necessary and sufficient condition in order that the lines $(X, \vec{e}_1), (X, \vec{e}_2)$ are immovability in the partial mapping f_4^3 are found.

Key words: *Frenet's net, cyclic net of Frenet, pseudofocus, a partial mapping, immovability line.*

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_1)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе $[1, C.481-482]$, $[2, c.348]$ для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i{}_k, \ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k,$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \qquad (2)$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \qquad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \qquad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана $[3, c.432]$ отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = B_{ijm}^k \omega^m, \qquad (5)$$

где $B_{ijm}^k = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{i\ell}^k \Lambda_{jm}^\ell + \Lambda_{\ell j}^k \Lambda_{im}^\ell$.

Система величин $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ образуют геометрический обьект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3,$$

и $\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0, \ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0,$ (6)

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0. \qquad (7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2, \quad k_2^1 = \Lambda_{21}^3, \quad k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус $[4, c.475-491]$ F_i^j ($i \neq j$) касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (7)$$

На каждой касательной ($X, \vec{e}_i$) существуют по три псевдофокуса. На прямой ($X, \vec{e}_1$) существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой ($X, \vec{e}_2$) $-F_2^1, F_2^3, F_2^4$, на прямой ($X, \vec{e}_3$) – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой ($X, \vec{e}_4$) – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе $[5, c.212-219]$, если реперы

$$\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4),$$

$$\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1),$$

$$\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2),$$

$\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$. Псевдофокус $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ определяемый радиус-векторам:

$$F_4^3 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4. \qquad (8)$$

Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_4^3 \in (X, \vec{e}_1)$ описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_4$. Получим частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f(X) = F_4^3$.

К области Ω_4^3 присоединим подвижной репер $\Re' = (F_4^3, \vec{c}_i)$ (9)

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, координатные векторы $\Re'$ имеют вид [8]:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_2 = \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{42}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_3 = -\frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \frac{B_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_4 = -\frac{\Lambda_{44}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{B_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\right)\vec{e}_4. \qquad (10)$$

Пусть прямая $(X, \vec{e}_2)$ неподвижна в частичном отображении f_4^3. Тогда из второго равенства формулы (10) имеем:

$$\Lambda_{42}^3 = 0, \qquad B_{432}^3 = 0. \qquad (11)$$

где $\Lambda_{42}^3 = -\Lambda_{32}^4$ – вторая кривизна линии ω^2 циклической сети Френе, $B_{432}^3 = -\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{43}$ (где $\vec{k}_{43} = \Lambda_{33}^4\vec{e}_4 = -\Lambda_{43}^3\vec{e}_4$ – первая кривизна линии ω^3 циклической сети Френе).

Обратно, если имеют места (11), то прямая $(X, \vec{e}_2)$ – неподвижна в частичном отображении f_4^3.

Аналогично, из условия неподвижности прямой $(X, \vec{e}_1)$ в частичном отображении f_4^3 имеем:

$$\Lambda_{41}^3 = 0, \qquad B_{431}^3 = 0, \qquad (12)$$

где $\Lambda_{41}^3 = -\Lambda_{31}^4$ – третья кривизна линии ω^1 циклической сети Френе, $B_{431}^3 = -\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{43}$

Обратно, если выполняются условия (12), то прямая $(X, \vec{e}_1)$ является неподвижной прямой в частичном отображении f_4^3.

Таким образом справедлива

Теорема. Прямые $(X, \vec{e}_2), (X, \vec{e}_1)$ неподвижны в частичном отображении f_4^3 тогда и только тогда, когда выполнены условия (11), (12) соответственно.

Следствие. Если линия $\beta \in \Delta_{(14)}$ совпадает с координатной линией ω^4 циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе (ω^4 всегда является двойной линией отображения f_4^3 [8]), то пара $(f_4^3, \Delta_{(14)})$ не имеет других двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(14)}$.

Литература:

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский//Москва. Наука. 1967. – С. 481-482.
2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И.А.Схоутен, Д.Дж.Стройк. // Москва. ИЛ. 1948.Т.II. – 348 с.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П.Фиников // М-Л.: Госттехиздат. 1948. – 432 с.
4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т.Базылев // Литовский математический сборник, 1966. – VI. №4. – С. 475-491.
5. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г.Матиева // Монография. Ош, 2003. – С. 212-219.
6. Кузьмин М.К. Сети, определяемые рапределениями в евклидовом пространстве E_n [Текст] / М.К. Кузмин // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1975. – Т.7. – С. 215-229.
7. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т.Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Москва, 1975. – вып.6. – С.19-25.
8. Матиева Г. О частичном отображении 4-мерного евклидова пространства, порождаемом заданной сетью гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ж.А. Артыкова // Международный научный журнал “Символ науки”. – Уфа, 2015. – С. 10-16.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.А.