Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Артыкова Ж.А.

E5 ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИГИНДЕ $\left(f_1^5, \Delta_{(1st)}\right)$ ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫГЫНЫН ЖАШАШЫ ЖӨНҮНДӨ

Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Артыкова Ж.А.

О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ $\left(f_1^5, \Delta_{(1st)}\right)$ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E5

Matieva G., Abdullaeva Ch. X., Artykova J.A.

ABOUT EXISTENCE OF QUASIDOUBLE LINES OF A PAIR $\left(f_1^5, \Delta_{(1st)}\right)$ IN EUCLIDEAN SPASE E5

УДК: 514.75

Беш ченемдүү евклиддик мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү каралган: ар бир $X \in \Omega \subset E_5$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган кыймылдуу $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4,5\right)$ репери берилген сызыктар көптүгүнүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынат. $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Френенин торчосун түзүшөт. Бул торчонун ω^1 сызыгынын $\left(X, \vec{e}_1\right)$ жанымасында F_1^5 чекити аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_1^5 чекити өзүнүн Ω_1^5 аймагын сызып чыгат. Натыйжасында бөлүктөп чагылтуусу пайда болот:

Бул макалада үч ченемдүү $\Delta_{(1st)}$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон γ сызыгы $\left(f_1^5, \Delta_{(1st)}\right)$ түгөйүнүн квазикошмок сызыгы болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Негизги сөздөр: *Френенин торчосу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, бөлүктөп чагылтуунун квазикошмок сызыгы,бөлүштүрүү.*

В области $\Omega \subset E_5$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_{i,}\right)$ $\left(i, j, k = \overline{1,5}\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5. На касательной к линии ω^1 сети Σ_5 инвариантным образом определяется точка $F_1^5 \in \left(X, \vec{e}_1\right)$. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_1^5 описывает свою область Ω_1^5 в E_5. Получается частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

Найдены необходимое и достаточное условия для того чтобы линия γ, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(1st)}$ $(s, t = 2,3,4,5)$, являлась двойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(1st)}\right)$.

Ключевые слова: *частичное отображение, репер Френе, циклическая сеть Френе, псевдофокус, двойная линия частичного отображения, распределение.*

In domain $\Omega \subset E_5$ it is considered a set of smooth lines such that through a point $X \in \Omega$ passed one line of given set. The moving frame $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4,5\right)$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net Σ_5 of Frenet. There is exists a point $F_1^5 \in \left(X, \vec{e}_1\right)$ on the tangent of the line ω^1. When the point X is shifted in the domain Ω, the point F_1^5 describes it's domain Ω_1^5 in E_5. It is defined the partial mapping $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ such that $f_1^5(X) = F_1^5$.

Necessary and sufficient conditions in order that a line γ *belonging to the three dimensional distribution* $\Delta_{(1st)}$ *is quasidouble line of the pair* $\left(f_1^5, \Delta_{(1st)}\right)$ *are proved.*

Key words: *Frenet frame, cyclic net of Frenet, quasidouble line of a partial mapping, distribution, pseudofocus.*

В области Ω евклидова пространства E_5, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4,5\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i \quad , \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k . \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \; D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \; \omega_i^j + \omega_j^i = 0 . \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j . \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) отсюда имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i . \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j .$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [5] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right) \omega^m . \tag{5}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5\vec{e}_5,$$
$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4\vec{e}_4$$

и $$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0,\ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0 \qquad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0,\ \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0,\ \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0. \qquad (7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$ – первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

На каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существуют по четыре псевдофокуса. На прямой $(\boldsymbol{X}, \vec{\boldsymbol{e}}_1)$ существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5$, на прямой $(X, \vec{e}_2)$ – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5$, на прямой $(X, \vec{e}_3)$ $-F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5$, на прямой $(X, \vec{e}_4)$ – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_5^4$, на прямой $(X, \vec{e}_5)$ – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4$.

Сеть Σ_5 в $\Omega \subset E_5$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$, $\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Re_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 сети Σ_5 одновременно.

Пусть сеть Σ_5 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_5$. Псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ определяется радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_2^1} = \overrightarrow{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2. \qquad (9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. Определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

К области Ω_1^5 присоединим подвижной репер $\Re' \in (F_1^5, \vec{b}_i)$, где векторы $\vec{b}_i$ имеют вид [6]:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^5_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5; \tag{10}$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda^5_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5 \ ;$$

$$\vec{b}_5 = \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 \ .$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Рассмотрим трехмерное распределение $\Delta_{(123)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и линию α, принадлежащую этому распределению. Ее касательный вектор $\vec{\alpha}$ имеет вид: $\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\alpha}}$ линии $f^5_1(\alpha) = \bar{\alpha}$. Он имеет вид:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\vec{b}_1 + \alpha^2\vec{b}_2 + \alpha^3\vec{b}_3.$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \left(\alpha^1 b^1_1 + \alpha^2 b^1_2 + \alpha^3 b^1_3\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha^1 b^2_1 + \alpha^2 + \alpha^3 b^2_3\right)\vec{e}_2 +$$
$$+\alpha^3\vec{e}_3 + \left(\alpha^2 b^5_2 + \alpha^3 b^5_3\right)\vec{e}_5,$$

где b^j_i $- j$ –тые координаты вектора $\vec{b}_i$.

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называют двойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ пересекаются, либо параллельны [6].

Линия ℓ называется двойной линией пары (g, Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [6].

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_n называются квазидвойными линиями отображения g, если касательные к ним взятые в соответствующих точках $X,\ g(X)$, принадлежат одному и тому же n-мерному(p<n) подпространству пространства E_n;

Линия ℓ называется квазидвойной линией пары $(g,\ \Delta_p)$, если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [8].

Из условия $\vec{a}, \vec{\bar{\alpha}}, \overrightarrow{XF^5_1} \in \Delta_{(123)}$.

имеем: $$\alpha^2 b^5_2 + \alpha^3 b^5_3 = 0 \ .$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\Lambda^5_{12}\alpha^2 + \Lambda^5_{13}\alpha^3 = 0 \tag{11}$$

где $\Lambda_{12}^{5} = -\Lambda_{52}^{1}$ – четвертая кривизна линии ω^{2} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$; $\Lambda_{13}^{5} = -\Lambda_{53}^{1}$ – третья кривизна линии ω^{3} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$.

Обратно, если имеет место равенство (11), то линия α, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \ \Delta_{(123)}\right)$.

Таким образом справедлива

Теорема 1. Линия α, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(123)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты α^2, α^3 её касательного вектора $\vec{\alpha}$ удовлетворяют условию (11).

Аналогично доказывается

Теорема 2. Линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(124)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты β^2, β^4 её касательного вектора $\vec{\beta}$ удовлетворяют условию:

$$\Lambda_{12}^{5}\beta^{2} + \Lambda_{14}^{5}\beta^{4} = 0 \qquad (12)$$

где $\Lambda_{12}^{5} = -\Lambda_{52}^{1}$ – четвертая кривизна линии ω^{2} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$, $\Lambda_{14}^{5} = -\Lambda_{54}^{1}$ – вторая кривизна линии ω^{4} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$

Литература:

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва. Наука.1967. – С. 481-482.
2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст]/ И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк. // Москва. ИЛ.1948.Т.II – 348 с.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат,.1948. – 432 с.
4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т. Базылев // Литовский математический сборник, 1966. – VI, №4. – С. 475-491.
5. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. Ош, 2003. – С.212-219.
6. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур,1975.вып.6.-С.19-25.
7. Матиева Г. Необходимое и достаточное условия вырожденности одного частичного отображения пространства [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева // Научное периодическое издание «IN SITU». ISSN 2411-7161, № 6/2016.-С.5-9.
8. Курбанбаева Н.Н. О квазидвойных линиях частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, №1 – Бишкек, 2016. – С. 7-10.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.