Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Папиева Т.М.

E_5 ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КЫЙМЫЛСЫЗ ТҮЗ СЫЗЫКТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Папиева Т.М.

О НЕПОДВИЖНЫХ ПРЯМЫХ ОДНОГО ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_5

G. Matieva, Ch.X. Abdullaeva, T.M. Papieva

ABOUT IMMOVABILITI LINES OF A PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE E_5

УДК: 514.75

E_5 мейкиндигинин Ω аймагында жылма сызыктардын ушундай көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу бул көптүктүн бир сызыгы өтөт. Ω аймагында кыймылдуу ортонормаланган $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = \overline{1,5})$ репери берилген жылма сызыктар көптүгүнүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынган. $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Френенин торчосун Σ_5 түзүшөт.

Бул торчонун ω^2 сызыгынын $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_2^1 чекити E_5 мейкиндигинде өзүнүн Ω_2^1 аймагын сызып чыгат. Натыйжада $f_2^1(X) = F_2^1$. бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.

$(X, \vec{e}_3)$, $(X, \vec{e}_4)$, $(X, \vec{e}_5)$ түз сызыктары бөлүктөп чагылтуусунда кыймылсыз болуштарынын зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

***Негизги сөздөр:** бөлүктөп чагылтуу, Френенин циклдик торчосу, Френенин репери, псевдофокус, түз сызыктын кыймылсыздыгы.*

В области $\Omega \subset E_5$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = \overline{1,5})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 На касательной к линии ω^2 сети Σ_5 инвариантным образом определяется точка $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_2^1 описывает свою область Ω_2^1 в E_5. Получается частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1$.

Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $(X, \vec{e}_3)$, $(X, \vec{e}_4)$, $(X, \vec{e}_5)$ являлись неподвижными в частичном отображении f_2^1.

***Ключевые слова:** частичное отображение, циклическая сеть Френе, репер Френе, псевдофокус, неподвижность прямой.*

In domain $\Omega \subset E_5$ it is considered a set of smooth lines such that through a point $X \in \Omega$ passed one line of given set. The moving frame $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = \overline{1,5})$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net Σ_5 of Frenet. There is exist the point $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ on the tangent of the line ω^2. When the point X is shifted in the domain Ω, the point F_2^1 describes it's domain Ω_2^1 in E_5. It is defined the partial mapping $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ such that $f_2^1(X) = F_2^1$.

Necessary and sufficient conditions of immovability of lines $(X, \vec{e}_3)$, $(X, \vec{e}_4)$, $(X, \vec{e}_5)$ in partial mapping f_2^1 are proved

***Key words**: partial mapping, cyclic net of Frenet, Frenet frame, pseudofocus, immovability of a line.*

В области Ω евклидова пространства E_5, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i \right)$ $\left(i, j, k = \overline{1,5} \right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [3], [4] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k \; . \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) отсюда имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [5] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l \right) \omega^m. \tag{5}$$

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5\vec{e}_5,$$
$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4\vec{e}_4$$

и
$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0,\ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0 \qquad (6)$$
$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0,\ \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0,\ \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0. \qquad (7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$ – первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

На каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существуют по четыре псевдофокуса. На прямой $(\boldsymbol{X}, \vec{\boldsymbol{e}}_1)$ существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5$, на прямой $(X, \vec{e}_2)$ – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5$, на прямой $(X, \vec{e}_3)$ – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5$, на прямой $(X, \vec{e}_4)$ – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_5^4$, на прямой $(X, \vec{e}_5)$ – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4$.

Сеть Σ_5 в $\Omega \subset E_5$ называется циклической сетью Френе [2], если реперы $\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$, $\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Re_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 сети Σ_5 одновременно.

Пусть сеть Σ_5 является циклической сетью Френе. Её обозначим через $\widetilde{\Sigma}_5$. Псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ определяется радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_2^1} = \overrightarrow{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2. \qquad (9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_2^1 описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_5$. Определяется частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1$.

К области Ω_2^1 присоединен подвижной репер $\Re' \in \left(F_2^1, \vec{a}_i\right)$, где векторы $\vec{a}_i$ имеют вид [6]:

$$\vec{a}_1 = \frac{\Lambda_{211}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{21}^3}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3;$$

$$\vec{a}_2 = \left[1 + \frac{\Lambda_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3; \qquad (10)$$

$$\vec{a}_3 = -\frac{\Lambda_{23}^1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{A_{213}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$$

$$\vec{a}_4 = -\frac{\Lambda_{24}^1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{A_{214}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 + \frac{\Lambda_{24}^3}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3 + \vec{e}_4;$$

$$\vec{a}_5 = -\frac{\Lambda_{25}^1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{A_{215}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{25}^3}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3 + \vec{e}_5.$$

Потребуем неподвижность прямой $\left(X, \vec{e}_5\right)$ в частичном отображении $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$. Тогда из последнего равенства формулы (10) имеем:

$$\Lambda_{25}^1 = 0,\ A_{215}^1 = 0,\ \Lambda_{25}^3 = 0 \qquad (11)$$

где $\Lambda_{25}^1 = -\Lambda_{15}^2$ – вторая кривизна линии ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_5$;

$A_{215}^1 = -\vec{e}_2 \cdot d_5\vec{k}_{21}$ (где $\vec{k}_{21}$ – вектор первой кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$); $\Lambda_{25}^3 = -\Lambda_{35}^2$ – третья кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если имеет места условия (11), то прямая $\left(X, \vec{e}_5\right)$ является неподвижной прямой частичного отображения f_2^1.

Аналогичным образом получаются необходимые и достаточные условия неподвижности прямых $\left(X, \vec{e}_4\right)$, $\left(X, \vec{e}_3\right)$ в частичном отображении f_2^1, соответственно:

$$\Lambda_{24}^1 = 0,\ A_{214}^1 = 0,\ \Lambda_{24}^3 = 0, \qquad (12)$$

$$\Lambda_{23}^1 = 0,\ A_{213}^1 = 0, \qquad (13)$$

где $\Lambda_{24}^1 = -\Lambda_{14}^2$ – третья кривизна линии ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_5$;

$A_{214}^1 = -\vec{e}_2 \cdot d_4\vec{k}_{21}$ (где $\vec{k}_{21}$ – вектор первой кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$); $\Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$, $\Lambda_{23}^1 = -\Lambda_{13}^2$ – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; $A_{213}^1 = -\vec{e}_2 \cdot d_3\vec{k}_{21}$ (где $\vec{k}_{21}$ – вектор второй кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$).

Таким образом, справедлива

Теорема. Прямые $\left(X, \vec{e}_5\right)$, $\left(X, \vec{e}_4\right)$, $\left(X, \vec{e}_3\right)$ является неподвижными в частичном отображении f_2^1 тогда и только тогда, когда выполнены условия (11), (12), (13) соответственно.

Литература:

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т. Базылев // Литовский математический сборник, 1966. – VI, №4. – С. 475-491.
2. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. Ош, 2003. – С. 212-219.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва. Наука.1967. – С. 481-482.
4. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст]/ И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва. ИЛ.1948.Т.II – 348 с.
5. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.
6. Матиева Г. Об одном вырожденном частичном отображении пространства *E5* [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева // American Scientific Journal, №5 – United States, 2016. – С. 49-53.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Алымкулов К.