Кабаева Зарина

ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕСИН ОПТИМАЛДЫК БАШКАРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖЫЙНАЛУУ ЫЛДАМДЫГЫНА ПАРАМЕТРЛЕРДИН МААНИЛЕРИНИН ТААСИР ЭТИШИ ЖӨНҮНДӨ

Кабаева Зарина

О ВЛИЯНИИ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ

Zarina Kabaeva

INFLUENCE OF PARAMETER VALUES ON THE CONVERGENCE RATE OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF THERMAL PROCESS

УДК:536.24.61.43

Бул статьяда жылуулук өткөрүүнүн тендемесин жазууда жылуулук процесстерин сзыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин чыгарылышын тастыктаган теориялык чечимдерди далилдеген сандык эсептөөлөрдүн жыйынтыгы көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *функционал, оптималдык башкаруу, оптимальндык процесс, жакындаштырылган чыгарылыш, жыйналуучулук ылдамдыгы.*

В работе на примере одной задачи приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы, полученные при решении задачи нелинейной оптимизации теплового процесса описываемого уравнением теплопроводности. Исследовано влияние значений параметров задачи на скорость сходимости приближенного решения.

Ключевые слова: *функционал, оптимальное управление, оптимальный процесс, приближенное решение, скорость сходимости.*

In this paper, using the example of a single problem, the results of numerical calculations are presented that confirm the theoretical conclusions obtained in solving the problem of nonlinear optimization of the thermal process described by the heat equation. The influence of the values of the parameters of the problem on the rate of convergence of the approximate solution is investigated.

Keywords*: functional, optimal control, optimal process, approximate solution, rate of convergence.*

Это статья является продолжением работы [1], где были исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при двумерном векторном управлении и установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации, а также был разработан алгоритм построения её решения. Здесь будем рассматривать вопросы влияния отдельных параметров задачи на сходимость приближенного решения, в частности, на сходимость приближений оптимального процесса.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал

$$J\left[\bar{u}\right]=\int_0^1\left[V\left(T,x\right)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m u_k^2(t)dt,\ \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1]

$$V_t=V_{xx}+g\left(t,x\right)f\left[t,u_1\left(t\right),u_2\left(t\right)\right] \qquad 0<x<1; \qquad 0<t\le T,$$

$$V(0,x)=\psi(x), \qquad 0<x<1,$$

$$V_x(t,0)=0, \quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0, \quad \alpha>0,\ 0<t\le T, \tag{2}$$

где $\bar{u}(t)=\left(u_1\left(t\right),u_2\left(t\right)\right)\in H^2(0,T)=H\left(0,T\right)\times H\left(0,T\right)$ - вектор функция управления; $f[t,u_1(t),u_2\left(t\right)]\in H(0,T)$-заданная функция внешнего воздействия нелинейно-зависящая от вектор функции управления; $\psi(x)\in H_1(0,1)$-функция начального состояния управляемого процесса; H-гильбертово пространство; H_1- соболево пространство первого порядка; T-фиксировано;

Как показано в работе [1] обобщенное решение краевой задачи (2) имеет вид

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n(\tau)f\left[\tau,\bar{u}(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x)\,; \tag{3}$$

где

$$z_n(x)=p_n\cos\lambda_n x\,, \qquad p_n=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}} \tag{4}$$

ортонормированные собственные функции, а λ_n - соответствующие собственные значения краевой задачи, причем λ_n удовлетворяет уравнению

$\lambda tg\lambda=\alpha$ и оценке

$$(n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1)\,, \quad n=1,2,3... \,. \tag{5}$$

Компоненты оптимального управления, как решение системы нелинейных интегральных уравнений вида

$$\beta u_k(t)=\frac{\partial f\left[t,u_1,u_2\right]}{\partial u_k}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)\left[h_n-\int_0^T G_n(T,\tau)f\left[\tau,\bar{u}(\tau)\right]d\tau\right] \qquad k=1,2\,, \tag{6}$$

определяется по формулам

$$u_k(t)=\varphi_k\left[t,\vartheta(t),\beta\right],\ \ k=1,2\,, \tag{7}$$

где $\vartheta(t)$ и φ_k - известные функции.

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле

$$J\left[u_1(t),u_2(t)\right]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^2\left(u_1^2(t)+u_2^2(t)\right)dt\,,\ \ \beta>0\,. \tag{8}$$

Далее, установлены следующие оценки

$$\left\|\bar{u}(t)-\bar{u}^i(t)\right\|_{H^m}\le\left(\sum_{k=1}^{2}\varphi_k^2(\beta)\right)^{1/2}\frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0(t)\right]-\vartheta_0(t)\right\|_H \qquad i=1,2,3\ldots \tag{9}$$

$$\left\|V(t,x)-V_i(t,x)\right\|_H\le\sqrt{T}\mathrm{M}_0\left\|g(t,x)\right\|_H\left(\sum_{k=1}^{2}f_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{2}\varphi_k^2(\beta)\right)^{1/2}\frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0(t)\right]-\vartheta_0(t)\right\|_H \tag{10}$$

$$\left|J\left[\bar{u}\right]-J\left[\bar{u}^i\right]\right|\le C\frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0(t)\right]-\vartheta_0(t)\right\|_H, \qquad C-const. \tag{11}$$

Ниже приводим результаты численных расчетов, вычисленные при следующих данных:

T=2 , $\xi(x)$=1+x, $g(t,x)=tx$, $f\left[\mathrm{t},u_1(t)u_2(t)\right]=e^{-u_1^2(t)}+e^{1-u_2^2(t)}$,

$\psi_1(x)=1-\mathrm{x}$, $0<x<1,\ \ 0<t\le 2$.

Таблица для собственных значений λ_n:

$(\lambda_n tg\lambda_n = \alpha)$

Таблица1

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
Значение ($\alpha = 1/2$)	0.653271	3.29231	6.36162	9.47749	12.606	15.7397	18.876
Значение ($\alpha = 1$)	0.860334	3.42562	6.4373	9.52933	12.6453	15.7713	18.9024
Значение ($\alpha = 3/2$)	0.988241	3.54217	6.50966	9.58009	12.6841	15.8026	18.9286

Талица сходимость приближений функции $\vartheta(t)$:

$(\left\|\vartheta(t)-\vartheta_i(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0\left[h(t)\right]\right\|_H)$.

Таблица 2

	$\left\|\vartheta(t)-\vartheta_i(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma}\left\|G_0\left[h(t)\right]\right\|_H$		
i	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	4.2576	0.83166	0.41091
2	2.2797	0.26927	0.10437
3	1.2207	0.087184	0.02651
4	0.65359	0.028228	0.0067334
5	0.34996	0.0091395	0.0017102
6	0.18738	0.0029592	0.0004344
7	0.10033	0.00095811	0.00011033
8	0.053722	0.00031021	2.8025e-005
9	0.028765	0.00010044	7.1181e-006
10	0.015402	3.252e-005	1.808e-006

Установлены что векторное оптимальное управление имеет вид

$$u_1^0(t) = \varphi_1\left[t, \vartheta^0(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^0(t)}{\beta}\right)},$$

$$u_2^0(t) = \varphi_2\left[t, \vartheta^0(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^0(t)}{\beta}\right)+1},$$

а его приближения вычисляются по формулам

$$u_1^s(t) = \varphi_1\left[t, \vartheta^s(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^s(t)}{\beta}\right)};$$

$$u_2^s(t) = \varphi_2\left[t, \vartheta^s(t), \beta\right] = \pm\sqrt{\ln\left(-\frac{2\vartheta^s(t)}{\beta}\right)+1};$$

Таблица сходимости приближений оптимального управления ($u_1^0(t), u_2^0(t)$):

Таблица 3

	$\left\|u^0(t)-u^s(t)\right\|_{H^2} \le \sqrt{\varphi_{01}^2(\beta)+\varphi_{02}^2(\beta)}\,\dfrac{\gamma^s}{1-\gamma}\left\|G\left[\vartheta_0(t)\right]\right\|_H$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	9.0732	1.7723	0.87567
2	4.8581	0.57383	0.22242
3	2.6013	0.18579	0.056493
4	1.3928	0.060155	0.014349
5	0.74578	0.019477	0.0036446
6	0.39932	0.0063061	0.00092572
7	0.21381	0.0020418	0.00023513
8	0.11448	0.00066108	5.9722e-005
9	0.0613	0.00021404	1.5169e-005
10	0.032823	6.9301e-005	3.8529e-006

Скорость сходимость приближений оптимального процесса прослеживается из результатов, приведенных в таблицах 4.1-4.3:

Сходимость промежуточных приближений к оптимальному процессу

Таблица 4.1

	$\left\|V^0(t,x)-V_s^0(t,x)\right\|_H \le 6\sqrt{T\left(\dfrac{1}{\lambda_1^2}+\dfrac{1}{6}\right)}\left\|g(t,x)\right\|_H\left\|u^0(\tau)-u^s(\tau)\right\|_H$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	19.9175	3.0254	1.324
2	10.6647	0.97955	0.33628
3	5.7103	0.31715	0.085414
4	3.0576	0.10269	0.021695
5	1.6371	0.033248	0.0055104
6	0.8766	0.010765	0.0013996
7	0.46937	0.0034854	0.0003555
8	0.25132	0.0011285	9.0296e-005
9	0.13457	0.00036538	2.2935e-005
10	0.072053	0.0001183	5.8253e-006

2.2. Сходимость точных приближений к промежуточному приближению оптимального процесса. Эта сходимость следует из следующего соотношения

$$\left\|V_s^0(t,x)-V_s^r(t,x)\right\|_H^2 = \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau,u_1^s(\tau),u_2^s(\tau)]d\tau\right]^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty}\left[e^{-2\lambda_n^2 t}\psi_n^2 + \left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau,u_1^s(\tau),u_2^s(\tau)]d\tau\right)^2\right]dt \le$$

$$\le 2T\left(M\sum_{n=r+1}^{\infty}\psi_n^2 + M\sum_{n=r+1}^{\infty}\int_0^T g_n^2(\tau)d\tau\int_0^T f[\tau,u_1^s(\tau),u_2^s(\tau)]d\tau\right)\xrightarrow[r\to\infty]{} 0,$$

которое справедливо при каждом фиксированном $s = 1,2,3,...$, так как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю при $r \to \infty$.

Таблица 4.2

	$\left\|V_s^0(t,x)-V_s^r(t,x)\right\|_H^2 \le 2T\left(M\sum_{n=r+1}^{\infty}\psi_n^2+M\sum_{n=r+1}^{\infty}\int_0^T g_n^2(\tau)\,d\tau\int_0^T f[\tau,u_1^s(\tau),u_2^s(\tau)]d\tau\right)$		
r	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	2.6023	2.3987	2.3203
10	0.77728	0.74038	0.72651
100	0.24299	0.23217	0.22811
1000	0.076733	0.073337	0.072064
10000	0.024262	0.023189	0.022786
100000	0.0076721	0.0073328	0.0072056
1000000	0.0024261	0.0023188	0.0022786
10000000	0.00076721	0.00073328	0.00072056
100000000	0.00024261	0.00023188	0.00022786
1000000000	7.6721e-005	7.3328e-005	7.2056e-005

4.3. Сходимость конечномерных приближений к оптимальному процессу. Эта сходимость доказывается по следующей схеме

$$\left\|V^0(t,x)-V_s^r(t,x)\right\|_H \le \left\|V^0(t,x)-V_s^0(t,x)\right\|_H + \left\|V_s^0(t,x)-V_s^r(t,x)\right\|_H \xrightarrow[s,r\to\infty]{} 0.$$

Таблица 4.3

	$\left\|V^0(t,x)-V_s^r(t,x)\right\|_H \le \left\|V^0(t,x)-V_s^0(t,x)\right\|_H + \left\|V_s^0(t,x)-V_s^r(t,x)\right\|_H$			
S	*r = 1*	*r = 10*	*r = 100*	*r = 1000*
1	3.6443	2.0505	1.5521	1.396
2	2.6566	1.0628	0.56439	0.40835
3	2.4058	0.81192	0.31353	0.15748
4	2.342	0.7482	0.24981	0.093759
5	2.3259	0.73202	0.23362	0.077574
6	2.3217	0.72791	0.22951	0.073463
7	2.3207	0.72686	0.22847	0.072419
8	2.3204	0.7266	0.2282	0.072154
9	2.3204	0.72653	0.22814	0.072087
10	2.3204	0.72651	0.22812	0.07207

В заключение отметим, что изменение значения параметра α существенно влияет на скорость сходимости приближений как векторного оптимального управления, так и приближений оптимального процесса.

Литература:

1. Кабаева З.С. Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящем векторном управлении. [Текст]/Кабаева З.С. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям НАН КР. -вып.44 стр. –Бишкек, 2012г.- С-118-123.
2. КеримбековА., КабаеваЗ.С. Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящим векторном управлении. //Proceedings VI International Scientific conference. Part I(Secnions1,2,3,4).Aktobe's K.Zhubanov State University 14-17 October 2012.Aktobe, s.100-104.

Рецензент: к.ф.-м.н. Карабакиров К.Р.