Керимбеков А., Карабакиров К.Р.

КЫЙМЫЛДАГАН ЧЕКИТ АРКЫЛУУ ТААСИР ЭТКЕН УЧУРДАГЫ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖЫЙНАЛУУЧУЛУГУНУН ЫЛДАМДЫГЫНА ӨЗГӨРҮЛМӨ КОЭФФИЦИЕНТТИН ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИ

Керимбеков А., Карабакиров К.Р.

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

A.Kerimbekov, K.R. Karabakirov

ON THE INFLUENCE OF THE VARIABLE COEFFICIENT ON THE RATE OF CONVERGENCE OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A MOVING POINT SOURCE

УДК: 517.977.5

Кыймылдаган чекит аркылуу таасир эткен учурдагы чектик маселенин жакындаштырылган чыгарылышынын жыйналуучулугунун ылдамдыгына өзгөрүлмө коэффициенттин тийгизген таасири изилденген. Өзгөрүлмө коэффициенттин маанисинин чоңоюшу жыйналуучулуктун ылдамдыгынын азайышына алып келери сандык мисалда көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *чекиттик башкаруу, чектик маселе, функционалды минималдаштыруу, серпилгичтүү термелүүлөр, сызыктуу эмес оптималдаштыруу.*

Исследовано влияние переменного коэффициента на скорость сходимости приближенного решения краевой задачи с подвижным точечным источником. На численном примере показано, что увеличение значений переменного коэффициента приводит к уменьшению скорости сходимости.

Ключевые слова: *точечное управление, краевая задача, минимизация функционала, упругие колебания, нелинейная оптимизация.*

The influence of the variable coefficient on the rate of convergence of the approximate solution of the boundary value problem with a moving point source is investigated. In the numerical example, it is shown that an increase in the values of the variable coefficient leads to a decrease in the rate of convergence.

Key words: *point control, boundary value problem, functional minimization, elastic oscillations, nonlinear optimization.*

Задачам оптимизации волновых процессов при наличии точечных управлений посвящено немало работ, например, [1]-[6]. Однако эти исследования проводились для уравнений с постоянными коэффициентами.

В работе [7] исследование проводилось в случае, когда уравнение содержит переменный коэффициент. Данная статья является продолжением этой работы, и в ней основное внимание уделено влиянию переменного коэффициента на скорость сходимости приближенного решения краевой задачи.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &V_{tt} = V_{xx} + a(t)V + g(t,x)\delta(x - x_0(t)) f\left[t, u(t)\right] \\ &V(0,x) = \psi_1(x),\ V_t(0,x) = \psi_2(x) \\ &V_x(t,0) = 0,\ V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0,\ \alpha > 0,\ t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $x_0(t)$ – точка приложения функции внешнего воздействия $f\left[t, u(t)\right] \in H(0,\ T)$, которая меняет положение с течением времени $t \in [0,T]$ и удовлетворяет ограничению

$$0 \le x_0(t) \le 1;$$

$$a(t) \in H(0,T),\ g(t,x) \in C(\overline{Q}),\ \psi_1(x) \in H(0,1),\ \psi_2(x) \in H(0,1),\ \xi(x) \in H(0,1)$$

– заданные функции; функция внешнего воздействия $f\left[t, u(t)\right]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0,T)$ и является монотонной по функциональному аргументу $u(t)$, т.е.

$$\frac{\partial f\left[t,u\right]}{\partial u} \equiv f_u\left[t, u(t)\right] \ne 0,\ \forall t \in [0,T];$$

$H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y, T – фиксированный момент времени.

Как показано в работе [7] решение краевой задачи (1) и его m-е приближение определяются следующими равенствами

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)z_n(x),$$

$$V^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)z_n(x),$$

где резольвента

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,\dots,$$

а ее m-е приближение имеет вид

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,\dots$$

Были установлены [7] следующие оценки

$$R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\le\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left|K_{n,i}(t,s)\right|;$$

$$\left|K_{n,i}(t,s)\right|\le\frac{a_0^i}{\lambda_n^i}\cdot\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!},\quad i=1,2,3,\dots$$

Рассмотрим неравенство

$$\left\|V(t,x)-V^m(t,x)\right\|_H^2=\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right)a_n(s)ds\cdot z_n(x)\right)^2dxdt\le$$

$$\le\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right)^2a_n^2(s)ds\right)dt=$$

$$=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right)^2ds\int_0^T a_n^2(s)ds\right)dt,$$

которое, с учетом оценки

$$R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\le\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\frac{a_0^i}{\lambda_n^i}\cdot\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}=\frac{a_0}{\lambda_n}\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\frac{|\lambda|a_0(t-s)}{\lambda_n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{(i-1)!},$$

и выражений для остаточного члена для функции e^x: $r_m(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(m+1)!}\cdot x^{m+1}$,

$$|r_m(x)|<e^x\cdot\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\quad\text{и}\quad r_m\left(\frac{|\lambda|a_0(t-s)}{\lambda_n}\right)<e^{\frac{|\lambda|a_0(t-s)}{\lambda_n}}\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{|\lambda|a_0(t-s)}{\lambda_n}\right)^{m+1},$$

$$R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\le\frac{a_0}{\lambda_n}e^{\frac{|\lambda|a_0(t-s)}{\lambda_n}}\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{|\lambda|a_0(t-s)}{\lambda_n}\right)^{m+1};$$

примет вид

$$\left\|V\left(t,x\right)-V^{m}\left(t,x\right)\right\|_{H}^{2}=\int_{0}^{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{T}\left(\frac{a_0}{\lambda_n}\right)^{2}\frac{1}{\left((m+1)!\right)^{2}}e^{\frac{2|\lambda|a_0T}{\lambda_n}}\left(\frac{|\lambda|a_0T}{\lambda_n}\right)^{2(m+1)}ds\cdot\int_{0}^{T}a_n^2(s)dsdt\le$$

$$\le\left(\frac{a_0}{\lambda_n}\frac{e^{\frac{|\lambda|a_0T}{\lambda_1}}}{(m+1)!}\left(\frac{|\lambda|a_0T}{\lambda_n}\right)^{m+1}\right)^{2}T^{2}\times$$

$$\times3T\left(\left\|\psi_1(x)\right\|_H^2+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_H^2+2\left\|g(t,x_0)\right\|_H^2\cdot\left\|f\left(t,u(t)\right)\right\|_H^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right)<\infty.$$

Отсюда получаем оценку

$$\left\|V(t,x)-V^{m}(t,x)\right\|_{H}\le\frac{a_0}{\lambda_1}\frac{e^{\frac{|\lambda|a_0T}{\lambda_1}}}{(m+1)!}\left(\frac{|\lambda|a_0T}{\lambda_1}\right)^{m+1}T\times$$

$$\times\left(3T\left[\left\|\psi_1(x)\right\|_H^2+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_H^2+2\left\|g(t,x_0)\right\|_H^2\left\|f\left(t,u(t)\right)\right\|_H^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right]\right)^{1/2},\quad(2)$$

из которой при $m\to\infty$ следует, что приближения по резольвенте $V^m(t,x)$ сходятся к точному решению $V(t,x)$ при любом фиксированном управлении $u(t)\in H(0,T)$.

В соотношении (2) значение постоянной a_0 зависит от свойства переменного коэффициента $a(t)$ и влияет на скорость сходимости m-го приближения решения краевой задачи. Ниже приведены результаты численных расчетов, показывающих влияние значения постоянной a_0 на скорость сходимости. Значения в таблице просчитаны для случая, когда соотношение (2) приведено к виду

$$\left\|V(t,x)-V^{m}(t,x)\right\|_{H}\le\frac{e^{\frac{a_0}{\lambda_1}}}{(m+1)!}\left(\frac{a_0}{\lambda_1}\right)^{m+2}\quad\text{и}\quad\frac{a_0}{\lambda_1}=0,5;\quad\frac{a_0}{\lambda_1}=1;\quad\frac{a_0}{\lambda_1}=1,5;$$

Таблица 1

Сходимость приближенного решения краевой задачи

m	a_0/λ_1		
	0,5	1	1,5
1	0,103045079419	1,359140914230	7,562850306195
2	0,017174179903	0,453046971410	3,781425153098
3	0,002146772488	0,113261742852	1,418034432412
4	0,000214677249	0,022652348570	0,425410329723
5	0,000017889771	0,003775391428	0,106352582431
6	0,000001277841	0,000539341633	0,022789839092
7	0,000000079865	0,000067417704	0,004273094830
8	0,000000004437	0,000007490856	0,000712182472
9	0,000000000222	0,000000749086	0,000106827371
10	0,000000000010	0,000000068099	0,000014567369

.

Как видно из таблицы 1, увеличение значений a_0 (a_0 - точная верхняя граница переменного коэффициента $a(t)$) при фиксированном λ_1 приводит к уменьшению скорости сходимости приближенного решения.

Литература:

[1] Керимбеков А. Точечное и граничное управления волновым процессом // Вопросы качественного исследования и приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе, 1981. – С. 59–62.

[2] Керимбеков А. Точечное управление волновым процессом описываемым системой телеграфных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе, 1982, вып. 15. – С.309–319.

[3] Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 132с.

[4] Керимбеков А., Карабакиров К.Р. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при подвижном точечном управлении // Вестник КГУ им. Ж.Баласагына. – IV Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященная 80-летию члена-корр. РАН, академика НАН КР М.И. Иманалиева. – Бишкек, 2011. – С. 71–75.

[5] Керимбеков А., Карабакиров К.Р. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при подвижном точечном управлении // Вестник КРСУ. 2012. Т.12. №10. С. 161–164.

[6] Керимбеков А., Карабакиров К.Р. Разрешимость задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями при минимизации интегрального квадратичного функционала // Вестник КГУСТА. 2012. №2(36). С.143–145.

[7] Карабакиров К.Р. Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при подвижном точечном управлении // «Поиск». Научный журнал–приложение международного журнала «Высшая школа Казахстана». Серия ест. и тех. наук. №3/2014. С.140–146.

[8] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.

[9] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Эгембердиев Ш.А.