Э. Сейдакмат кызы

ВЕКТОРДУК БАШКАРУУ МЕНЕН ВОЛЬТЕРР ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР МЕНЕН МҮНӨЗДӨЛГӨН ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕССТЕРИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕЛЕРИН ЧЫГАРУУ

Э. Сейдакмат кызы

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

E. Seidakmat kyzy

THE SOLUTION OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VECTOR CONTROL

УДК: 517.97

Статьяда башкаруу параметрлери чектик шартка сызыктуу кирген учурда, вольтерр тибиндеги интегро-дифференциальнык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстеринин векторлук чектик башкаруу маселелеринин бир маанилүү чыгарылышы изилденген. Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин бир маанилүү чыгарылышынын жетишээрлик шарты табылган жана үчилтик түрүндө толук чыгарылышты тургузуунун алгоритми иштелип чыккан.

***Негизги сөздөр:** чектик маселе, функционал, вектордук оптималдык башкаруу, сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасы*

В статье исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи векторного граничного управления теплового процесса, описываемого вольтерровыми интегро-дифференциальным уравнением в случае, когда управляющие параметры нелинейно входят в граничные условия. Найдено достаточное условие однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации и разработан алгоритм построения полного решения в виде тройки.

***Ключевые слова:** краевая задача, функционал, векторное оптимальное управление, система нелинейных интегральных уравнений.*

In the paper, we investigated the questions of unique solvability the problem of vector boundary optimal control of the thermal processes described by Volterra integro-differential equations when the control parameters are nonlinearly included into the boundary conditions. For optimization problems we obtained the sufficient conditions of the unique solvability and we developed for constructing the complete solution in the form of the triple.

***Keywords:** boundary value problem, functional, vector optimal control, the system of nonlinear integral equations.*

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J\left[\vartheta(t),u(t)\right]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left(\vartheta^2(t)+u^2(t)\right)dt,\quad \beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1–3]

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau,\quad (t,x)\in Q, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=f\left[t,\vartheta(t)\right],\quad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=p\left[t,u(t)\right],\ 0<t\le T. \tag{4}$$

Здесь $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ — заданные функции; $f\left[t,\vartheta(t)\right]\in H(0,T)$, $p\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ – функции внешних источников, нелинейно зависящие от функции управления $\vartheta(t)\in H(0,T)$ и $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональным переменным $\vartheta(t)$, $u(t)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f\left[t,\vartheta(t)\right]}{\partial\vartheta}\ne 0,\ \ \frac{\partial p\left[t,u(t)\right]}{\partial u}\ne 0,\quad \forall t\in[0,T]; \tag{5}$$

ядро $K(t,\tau)$ –известная ограниченная функция, т.е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|,\quad D=\left\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\right\},\tag{6}$$

$\lambda-$ параметр, постоянная $\alpha>0,T-$ фиксированный момент времени, $H(Y)$ –гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Как показано в работе [3] оптимальное управление определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений

$$\beta\begin{pmatrix}\dfrac{\vartheta(t)}{f_\vartheta\left[t,\vartheta(t)\right]}\\ \dfrac{u(t)}{p_u\left[t,u(t)\right]}\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}z_n(0)\\ z_n(1)\end{pmatrix}G_n(t,\lambda)\int_0^T S_n(\tau,\lambda)\left(g_n(\tau),z_n(1)\right)\begin{pmatrix}f\left[\tau,\vartheta(\tau)\right]\\ p\left[\tau,u(\tau)\right]\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}z_n(0)\\ z_n(1)\end{pmatrix}G_n(t,\lambda)h_n,\tag{7}$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right)-\int_0^T S_n(t,\lambda)g_n(\tau)d\tau;$$

$$S_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right);$$

$$G_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T J_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right).$$

и при этом должны выполняться условия

$$f_\vartheta\left[t,\vartheta(t)\right]\left(\frac{\vartheta(t)}{f_\vartheta\left[t,\vartheta(t)\right]}\right)_\vartheta>0,\quad p_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{u(t)}{p_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0.\tag{8}$$

Система нелинейных интегральных уравнений (7) решается согласно методике, разработанной проф. А.Керимбековым [4]. Положим

$$\beta\frac{\vartheta(t)}{f_\vartheta\left[t,\vartheta(t)\right]}=\theta_1(t),\quad\beta\frac{u(t)}{p_u\left[t,u(t)\right]}=\theta_1(t).\tag{9}$$

Лемма 1. Вектор функция $\theta(t)=\left(\theta_1(t),\ \theta_2(t)\right)$ является элементом гильбертова пространства $H^2(0,T)=H(0,T)\times H(0,T)$.

Доказательство. В силу условия (5) имеет место оценка

$$\sup\left|f_\vartheta\left[t,\vartheta(t)\right]\right|\le M_1,\quad\sup\left|p_u\left[t,u(t)\right]\right|\le M_2,\quad\forall t\in[0,T].$$

Так, как $\vartheta(t)\in H(0,T)$ и $u(t)\in H(0,T)$, то утверждение леммы следует из неравенств

$$\int_0^T\theta_1^2(t)dt\le\beta^2\int_0^T\left|f_\vartheta\left[t,\vartheta(t)\right]\right|^2\left|\vartheta(t)\right|^2dt\le\beta^2M_1^2\int_0^T\vartheta^2(t)dt<\infty,$$

$$\int_0^T\theta_2^2(t)dt\le\beta^2\int_0^T\left|p_u\left[t,u(t)\right]\right|^2\left|u(t)\right|^2dt\le\beta^2M_2^2\int_0^T u^2(t)dt<\infty.$$

Согласно условию (8), из равенства (9) управления $\vartheta(t)$ и $u(t)$ определяются однозначно, т.е. существуют функции φ_1 и φ_2 такие, что

$$\vartheta(t) = \varphi_1\left[t, \theta_1(t), \beta\right], \quad u(t) = \varphi_1\left[t, \theta_2(t), \beta\right]. \tag{10}$$

В силу (9) и (10) систему уравнений (7) перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} z_n(0) \\ z_n(1) \end{pmatrix} G_n(t,\lambda) \int_0^T S_n(\tau,\lambda)\left(g_n(t), z_n(1)\right) \begin{pmatrix} f\left[\tau, \varphi_1\left(\tau, \theta_1(\tau), \beta\right)\right] \\ p\left[\tau, \varphi_2\left(\tau, \theta_2(\tau), \beta\right)\right] \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} z_n(0) \\ z_n(1) \end{pmatrix} G_n(t,\lambda) h_n .$$

Введя обозначения

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}, \quad Z_n(0,1) = \begin{pmatrix} z_n(0) \\ z_n(1) \end{pmatrix}, \quad P\left[\tau, \vartheta(\tau), u(\tau)\right] = \begin{pmatrix} f\left[\tau, \vartheta(\tau)\right] \\ p\left[\tau, u(\tau)\right] \end{pmatrix},$$

перепишем ее в следующем виде

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0,1) G_n(t,\lambda) \int_0^T S_n(\tau,\lambda) Z_n^*(0,1) P\left[\tau, \varphi_1\left[\tau, \theta_1(\tau), \beta\right], \varphi_2\left[\tau, \theta_2(\tau), \beta\right]\right] d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0,1) G_n(t,\lambda) h_n \tag{11}$$

или в операторной форме

$$\theta(t) = E\left[\theta_1(t), \theta_2(t)\right] + \hbar(t), \tag{12}$$

где

$$E\left[\theta_1(t), \theta_2(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0,1) G_n(t,\lambda) \int_0^T S_n(\tau,\lambda) Z_n^*(0,1) P\left[\tau, \varphi_1\left[\tau, \theta_1(\tau), \beta\right], \varphi_2\left[\tau, \theta_2(\tau), \beta\right]\right] d\tau ,$$

$$\hbar(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0,1) G_n(t,\lambda) h_n . \tag{13}$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (12).

Лемма 2. Функция $\hbar(t)$ является элементом пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T \left\|\hbar(t)\right\|_{R^2}^2 dt = \int_0^T \left(h_1^2(t) + h_2^2(t)\right) dt = \left\{ \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n(0) G_n(t,\lambda) h_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n(1) G_n(t,\lambda) h_n \right)^2 \right\} dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t,\lambda)\left(z_n^2(0) + z_n^2(1)\right) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \le 12\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2}\right) \times$$

$$\times \left(\left\|\xi(x)\right\|_H^2 + 2\left\|\psi(x)\right\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{\left(2\lambda_1^2\right)^2}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right) \left\|g(t,x)\right\|_H^2 \right) < \infty ,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 3. Оператор $E\left[\theta_1(t),\theta_2(t)\right]$ отображает пространство $H^2(0,T)$ в себя, т.е. является элементом пространства $H^2(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получим неравенство

$$\int_0^T E^2\left[\theta_1(t),\theta_2(t)\right]dt=$$

$$=\int_0^T\left(\left\|\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(0,1)G_n(t,\lambda)\int_0^T S_n(\tau,\lambda)Z_n^*(0,1)P\left[\tau,\varphi_1\left[\tau,\theta_1(\tau),\beta\right],\varphi_2\left[\tau,\theta_2(\tau),\beta\right]\right]d\tau\right\|\right)^2\le$$

$$\le 16\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\left(1+\frac{|\lambda|K_0TM_0}{2\lambda_1^2}\right)^2\times\left(\left\|f\left[\tau,\varphi_1\left(\tau,\theta_1(\tau),\beta\right)\right]\right\|_H^2+\left\|p\left[\varphi_2\left(\tau,\theta_2(\tau),\beta\right)\right]\right\|_H^2\right)<\infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть выполнены следующие условия Липщица

$$\left\|f\left[t,\vartheta(t)\right]-p\left[t,\bar{\vartheta}(t)\right]\right\|_H\le f_0\left\|\vartheta(t)-\bar{\vartheta}(t)\right\|_H,$$

$$\left\|p\left[t,u(t)\right]-p\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_H\le p_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H, \tag{14}$$

$$\left\|\varphi_i\left[t,\theta_i(t),\beta\right]-\varphi_i\left[t,\bar{\theta}_i(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_{0i}(\beta)\left\|\theta_i(t)-\bar{\theta}_i(t)\right\|_{H(0,T)},\ \varphi_{0i}(\beta)>0,\quad i=1,2. \tag{15}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=4\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda|K_0TM_0}{2\lambda_1^2}\right)B\left(f_0,p_0,\varphi_{10}(\beta),\varphi_{20}(\beta)\right)<1, \tag{15}$$

оператор $E[\theta]$ является сжимающим.

Доказательство. С учетом вычислений, проведенных при доказательстве леммы 3., имеем неравенство

$$\left\|E[\theta]-E\left[\bar{\theta}\right]\right\|_{H^2}^2=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(0,1)G_n(t,\lambda)\int_0^T S_n(\tau,\lambda)Z_n^*(0,1)\begin{pmatrix}f\left[\tau,\varphi_1\left(\tau,\theta_1(\tau),\beta\right)\right]\\ p\left[\tau,\varphi_2\left(\tau,\theta_2(\tau),\beta\right)\right]\end{pmatrix}d\tau-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(0,1)G_n(t,\lambda)\int_0^T S_n(\tau,\lambda)Z_n^*(0,1)\begin{pmatrix}f\left[\tau,\varphi_1\left(\tau,\bar{\theta}_1(\tau),\beta\right)\right]\\ p\left[\tau,\varphi_2\left(\tau,\bar{\theta}_2(\tau),\beta\right)\right]\end{pmatrix}d\tau\right)^2dt\le$$

$$\le 16\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\left(1+\frac{|\lambda|K_0TM_0}{2\lambda_1^2}\right)^2\left(\left\|f\left[\tau,\varphi_1\left(\tau,\theta_1(\tau),\beta\right)\right]-f\left[\tau,\varphi_1\left(\tau,\bar{\theta}_1(\tau),\beta\right)\right]\right\|_H^2+\right.$$

$$\left.+p_2\left[\tau,\varphi\left(\tau,\theta_2(\tau),\beta\right)\right]-p\left[\tau,\varphi_2\left(\tau,\bar{\theta}_2(\tau),\beta\right)\right]_H^2\right)\le$$

$$\le 16\left(1+\frac{|\lambda|K_0TM_0}{2\lambda_1^2}\right)^2\left(f_0^2\varphi_{01}^2(\beta)\left\|\theta_1(t)-\bar{\theta}_1(t)\right\|_H^2+p_0^2\varphi_{02}^2(\beta)\left\|\theta_2(t)-\bar{\theta}_2(t)\right\|_H^2\right)\le$$

$$\le 16\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\left(1+\frac{|\lambda|K_0TM_0}{2\lambda_1^2}\right)^2B^2\left(f_0,p_0,\varphi_{01}(\beta),\varphi_{02}(\beta)\right)\left\|\theta(t)-\bar{\theta}(t)\right\|_H^2<\infty,$$

где $B^2\left(f_0, p_0, \varphi_{01}(\beta), \varphi_{02}(\beta)\right) = \max\left(f_0^2\varphi_{01}^2(\beta), p_0^2\varphi_{02}^2(\beta)\right)$,

откуда находим, что

$$\left\|E[\theta]-E\left[\bar{\theta}\right]\right\|_H \le 16\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\left(1+\frac{|\lambda|K_0TM_0}{2\lambda_1^2}\right)^2\times$$

$$\times B^2\left(f_0, p_0, \varphi_{01}(\beta), \varphi_{02}(\beta)\right)\left\|\theta(t)-\bar{\theta}(t)\right\|_H^2 = \gamma\left\|\theta(t)-\bar{\theta}(t)\right\|_H < \infty .$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), (8), (14)-(16). Тогда операторное уравнение (3.8) в пространстве $H^2(0,T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно *Леммам 1 – 3* операторное уравнение (12) можно рассматривать в пространстве $H^2(0,T)$. Согласно *Лемме 4* оператор $E[\theta]$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство $H^2(0,T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме [5] о принципе сжимающих отображений оператор $E[\theta]$ имеет единственную неподвижную точку, т.е. операторное уравнение (12) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (12) может быть найдено методом последовательных приближений, т.е. l – е приближение решения находится по формуле

$$\theta_l(t) = E\left[\theta_{l-1}(t)\right], \quad l = 1,2,3,...,$$

где $\theta_0(t)$ произвольный элемент пространства $H^2(0,T)$, причем имеет место оценка

$$\left\|\bar{\theta}(t)-\theta_l(t)\right\|_{H^2(0,T)} \le \frac{\gamma^l}{1-\gamma}\left\|E\left[\theta_0(t)\right]+\hbar(t)-\theta_0(t)\right\|_H ,$$

которая в силу произвольности $\theta_0(t)$ при $\theta_0(t)=\hbar(t)$ имеет вид

$$\left\|\bar{\theta}(t)-\theta_l(t)\right\|_{H^2(0,T)} \le \frac{\gamma^l}{1-\gamma}\left\|E\left[\theta_0(t)\right]\right\|_H . \tag{16}$$

Точное решение $\bar{\theta}(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т.е.

$$\bar{\theta}(t) = \lim_{l\to\infty}\theta_l(t).$$

Это решение подставляя в (9) находим искомое оптимальное управление

$$\vartheta^0(t) = \varphi_1\left[t, \bar{\theta}_1(t), \beta\right],$$

$$u^0(t) = \varphi_2\left(t, \bar{\theta}_2(t), \beta\right). \tag{17}$$

Оптимальный процесс $v^0(t,x)$, т.е. решение краевой задачи (2)-(4), соответствующее оптимальному управлению $\vartheta^0(t)$ и $u^0(t)$, находим по формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)b_n^0(s)ds + b_n^0(t)\right]z_n(x), \tag{18}$$

где $b_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)f\left[\tau,\vartheta^0(\tau)\right]+z_n(1)p\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right)d\tau$.

Минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$J\left[\vartheta^0(t),u^0(t)\right]=\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left(\left[\vartheta^0(t)\right]^2+\left[u^0(t)\right]^2\right)dt. \qquad (19)$$

Найденная тройка $\left(\left(\vartheta^0(t),u^0(t)\right),\ \nu^0(t,x),\ \ J[\vartheta^0(t),\ u^0(t)]\right)$ является полным решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература:

1. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. // Труды МИАН, -1961, Т.61, - С.3-158.
2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений - М.: Наука, 1982.-304с.
3. Сейдакмат кызы Э. Векторное граничное управление тепловыми процессами, описываемыми вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями. // Материалы XI Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016», посвященной 20-летию ЕНУ им.Л.Н. Гумилева, – Астана, 2016. - С. 1198-1201.
4. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. – Дисс… докт. физ.-мат наук. Институт математики НАН КР. – Бишкек, 2003. – 224с.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.- М.: Наука, 1965.-520 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Керимбеков А.К.