Керимбеков А., Таирова О.К.

СЫЗЫКТУУ- БӨЛҮКТҮҮ ФУНКЦИОНАЛДЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУДАГЫ ЧЕКИТТИК БАШКАРУУНУН СИНТЕЗ МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

Керимбеков А., Таирова О.К.

О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ТОЧЕЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

A.Kerimbekov, O.K. Tairova

ABOUT THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF POINT CONTROL WITH MINIMIZATION OF A PIECEWISE LINEAR FUNCTIONAL

УДК 517.97

Макалада интегро-диффренциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн ийкемдүү термелүүнүн оптималдуу башкаруунун синтез маселеси каралат. Оптималдаштыруу маселесинин чечилиши тышкы булактын функциясы башкаруу параметрлеринен сызыктуу эмес көз каранды жана чекиттик мүнөзгө ээ, ал эми башкаруу критерийи сызыктуу- бөлүктүү функционал болгон учурларда изилденген.

Негизги сөздөр: *жалпыланган чыгарылыш, чектик маселе, интегро-дифференциалдык теңдеме, оптималдуу башкаруу, синтез маселеси, функционал, Фрешенин дифференциалы.*

В статье рассмотрена задача синтеза при оптимальном управлении упругими колебаниями, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями. Исследована разрешимость задачи оптимизации в случае, когда функция внешнего источника нелинейно зависит от параметров управления и носит точечный характер, а критерием управления является кусочно-линейный функционал.

Ключевые слова: *обобщенное решение, краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, оптимальное управление, задача синтеза, функционал, дифференциал Фреше.*

The problem of synthesis for optimal control of elastic oscillations described by integro-differential equations is considered in the paper. The solvability of the optimization problem was investigated in the case when the function of an external source is nonlinearly dependent on the control parameters and has a point character, and the control criterion is a piecewise-linear functional.

Key words: *general solution, boundary problem, integro-differential equation, optimal control, problem of synthesis, functional, differential of Frechet.*

1. Обобщенное решение краевой задачи

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый гиперболическим уравнением:

$$V_{tt}(t,x)=V_{xx}(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0\right)g(x)u(t),\ \left(t,x\right)\in Q, \tag{1}$$

где $V=V(t,x)$ скалярная функция, характеризующая состояние управляемого процесса; $K\left(t,\tau\right)$ – заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty,$$

т.е., $K(t,\tau)\in H(D)$; $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака; $x_0\in\left(0,1\right)$ - точка приложения управления $u(t)\in H(0,T)$; $g(x)\in H(0,1)$ - заданная функция; $Q=\{(0,1)\times(0,T)\}$ прямоугольник, λ – параметр, T - фиксированный момент времени; $H(Y)$ - гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y .

Вместе с уравнением (1) рассмотрим начальные

$$V(0,x)=\psi_1(x), V_t(0,x)=\psi_2(x),\ 0<x<1 \tag{2}$$

и граничные:

$$V_x(t,0)=0, V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ 0<t\le T \tag{3}$$

условия, где $\psi_1(x)\in H(0,1),\ \psi_2(x)\in H(0,1)-$заданы, α – положительное число.

Обобщенным решением краевой задачей (1)-(3) будем понимать функцию $V(t,x)\in H(Q),$ имеющую в Q производные V_t, V_x, принадлежащие пространству $H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_Q (V_t\Phi)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\{\int_0^1[V_t\Phi_t-V_x\Phi_x+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V\left(\tau,x\right)d\tau\Phi(t,x)+ \\ \delta\left(x-x_0\right)g(x)u(t)\Phi(t,x)]dx-\alpha V(t,1)\Phi(t,1)\}dt \tag{4}$$

для любой функции $\Phi(t,x)\in H_1(Q)$ и в слабом смысле начальным условием (2), т.е. при $t\to+0$ для любой функции $\Phi_0(x)\in H(Q)$ выполняются условия:

$$\int_0^1[V(t,x)-\psi_1(x)]\Phi_0(x)dx\to 0;\ \int_0^1[V_t(t,x)-\psi_2(x)]\Phi_0(x)dx\to 0, \tag{5}$$

здесь t_1 и t_2 произвольные моменты времени, удовлетворяющие условию

$$0\le t_1\le t_2\le T.$$

Краевая задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение:

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x);V_n(t)=\left\langle V(t,x),z_n(x)\right\rangle, \tag{6}$$

где $V_n(t)$ коэффициенты Фурье функции $V(t,x)$; $\left\{z_n(x)\right\}$ полная в $H(0,1)$ ортонормированная система обобщенных собственных функций краевой задачи

$$z''(x)+\lambda^2 z(x)=0,$$

$$z_n{}'(0)=0,\ z_n{}'(1)+\alpha z_n(1)=0,$$

имеющей решение $z_n(x)=\sqrt{\dfrac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x$, где $\left\{\lambda_k\right\}$ последовательность собственных значений, причем $\lambda_k\le\lambda_{k+1}$ и $\lambda_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Для определения $V_n(t)$ используем интегральные тождества (4). Полагая в (4) $\Phi(t,x)=z_n(x),$ $t_1=0$ и $t_2=t$, совершив несложные преобразование имеем

$$V_n{}'(t)=\psi_{2n}-\lambda_n^2\int_0^t V_n(s)ds+\int_0^t\left[\lambda\int_0^T K(s,\tau)V_n(\tau)d\tau+z_n(x_0)g(x_0)u(s)\right]ds. \tag{7}$$

Продифференцировав (7) относительно $V_n(t)$ получим интегро-дифференциальное уравнение

$$V_n{}''(t)=-\lambda_n^2V_n(t)+\psi_n(t,\lambda,u), \tag{8}$$

с начальными условиями

$$V_n(0)=\psi_{1n},\ V_n{}'(0)=\psi_{2n}, \tag{9}$$

где $\psi_{1n}=<\psi_1(x),z_n(x)>,\ \psi_{2n}=<\psi_2(x),z_n(x)>$ – коэффициенты Фурье функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и

$$\psi_n(t,\lambda,u) = \lambda\int_0^T K(t,\tau)V_n(\tau)d\tau + g(x_0)z_n(x_0)u(t).$$

Задача Коши (8)-(9) имеет следующее решение

$$V_n(t) = F_n(t,u) + \lambda\int_0^T R_n(t,\tau)V_n(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $F_n(t,u) = \psi_{1n}\cos\lambda_n t + \psi_{2n}\sin\lambda_n t + \dfrac{g(x_0)z_n(x_0)}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-s)u(s)ds,$

$$R_n(t,\tau) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-s)K(s,\tau)ds.$$

Согласно [2] (6) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)F_n(s,u)ds + F_n(t,u)\right)z_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda) + \frac{g(x_0)z_n(x_0)}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)u_k(\eta)d\eta\right\}z_n(x); \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\psi_n(t,\lambda) = \psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] +$$

$$+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right];$$

$$\varepsilon_n(t,\eta,\lambda) = \begin{cases} \sin\lambda_n(t-\eta) + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0\le\eta\le t; \\ \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t\le\eta\le T; \end{cases}$$

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}R_{n,i}(t,s), \quad n = 1,2,3,...,$$

резольвента ядра $R_{n,1}(t,s) = R_n(t,s)$. При этом интерированные ядра определяются по формулам

$$R_{n,i+1}(t,s) = \int_0^T R_n(t,\eta)R_{n,i}(\eta,s),\ i = 1,2,3,...$$

2. Постановка задачи синтеза

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый краевой задачей (1)-(3). Краевая задача (1) - (3) имеет единственное обобщенное решение $V(t,x)\in H_1(Q)$ которое определяется формулами (6), (11) н удовлетворяет интегральному тождеству (4).

Рассмотрим следующую задачу синтеза: среди допустимых управлений $u(t)\in H(0,T)$ найти такое $u^0(t) = u^0[t,V^0(t,x)]$, где $V^0(t,x)$ решение краевой задачи (1) - (3) при $u = u^0(t)$, для которого функционал

$$I(u)=\int_0^1\{[V(T,x)-\xi_1(x)]^2+[V_t(T,x)-\xi_2(x)]^2\}dx+\beta\int_0^T|u(t)|\,dt,\ \beta>0 \qquad (12)$$

принимает наименьшее возможное значение, где $\xi_1(x),\xi_2(x)\in H(0,1)-$ заданные функции.

Пусть каждому допустимому управлению $u(t)\in H(0,T)$ соответствует единственное решение $V(t,x)$ краевой задачи (1) - (3).

Тогда, согласно методике А. И. Егорова [1] вкратце приведем процедуру вывода уравнения Беллмана.

Введем обозначение:

$$S(t,W(t,x)]=\min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le T}}\{\int_0^1\|W(T,x)-\xi(x)\|^2dx+\beta\int_t^T|u(\tau)|\,d\tau\}, \qquad (13)$$

где p -область допустимых значений управления $u(t)$; $W(t,x)=\{V(t,x),V_t(t,x)\}$– вектор - функция состояния; $\xi(x)=\{\xi_1(x),\xi_2(x)\},\xi_1(x)\in H_1(0,1),\xi_2(x)\in H(0,1)$, – заданная вектор функция.

В основе методики решения задачи синтеза лежит принцип оптимальности Беллмана. Согласно этому принципу (13) перепишем в виде

$$S[t,W]=\min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le T}}\{\beta\int_t^{t+\Delta t}|u(\tau)d\tau|+S[t+\Delta t,W(t,x)+\Delta W(t,x)]\} \qquad (14)$$

Предположим, что $S[t,W]$ как функция дифференцируема по t, а как функционал $S[t,W]$ по W дифференцируем по Фреше. Тогда имеет место равенство

$$S[t+\Delta t,W+\Delta W]=S[t,W]+\frac{\partial S[t,W+\Delta W]}{\partial t}\Delta t+\Phi(t,W+\Delta W)+o_1(\Delta t)+$$

$$+\delta_1(t,W(t,x),\Delta W(t,x))=S[t,W]+\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t+\Phi(t,W;\Delta W)+o_1(\Delta t)+$$

$$+\delta_1(t,W(t,x);\Delta W(t,x))+\left[\frac{\partial S[t,W+\Delta W]}{\partial t}-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\right]\Delta t$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ - дифференциал Фреше функционала S, вычисленый в точке (t,W). Далее, используя формулу Лагранжа, находим, что

$$\frac{\partial S[t,W+\Delta W]}{\partial t}-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}=\Phi_1[t,W(t,x)+\alpha\Delta W(t,x),\Delta W(t,x)]=$$

$$=\Phi_1[t,W(t,x),\Delta W(t,x)]+\delta_2(t,W(t,x),\Delta W(t,x)), \qquad 0<\alpha<1$$

Таким образом, получаем

$$S[t+\Delta t,W(t,x)+\Delta W(t,x)]=S[t,W(t,x)]+\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t+dS[t,W;\Delta W]+o(\Delta t)+$$

$$+\delta[t,W(t,x);\Delta W(t,x)], \qquad (15)$$

где $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\to 0$ при $\Delta t\to 0$; и $\frac{\delta[t,W;\Delta W]}{\|\Delta t\|}\to 0$ при $\|\Delta W\|\to 0.$

Подставим (15) в (14) имеем

$$-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t=\min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\{\beta\int_t^{t+\Delta t}|u(\tau)|\,d\tau+dS[t,W,\Delta W]+o(\Delta t)+$$

$$+\delta[t,W(t,x);\Delta W(t,x)]\}. \qquad (16)$$

Так как $\Delta W(t,x)\in H(0,1)$ при всех $t\in[0,T]$, то для дифференциала Фреше имеет место равенство:

$$dS[t,W;\Delta W]=\int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx=$$
$$=\int_0^1(m_1(t,x)\Delta V(t,x)+m_2(t,x)\Delta V_t(t,x))dx, \qquad (17)$$

где вектор - функция $m(t,x)=\{m_1(t,x),m_2(t,x)\}$ является градиентом функционала $S[t,W]$ и принадлежит пространству $H^2(Q)$ почти при всех $t\in[0,T]$. С учетом выражения для $dS[t,W,\Delta W]$ из (17) получаем

$$-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}\Delta t=\min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\{\beta\int_t^{t+\Delta t}|u(\tau)|\,d\tau+\int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx+$$
$$+o(\Delta t)+\delta[t,W,\Delta W]\}.$$

Легко проверить, что справедливо тождество

$$\int_0^1 m^*(t,x)\Delta W(t,x)dx=\int_0^1[m_2(t,x)V_t(t,x)]_t^{t+\Delta t}dx+$$
$$+\int_0^1 m_1(t,x)\Delta V(t,x)-\Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx. \qquad (18)$$

Предположив, что $m_2(t,x)\in H_1(Q)$, в (4) полагая $\Phi(t,x)=m_2(t,x)$ и $t_1=t, t_2=t+\Delta t$ имеем тождество

$$\int_Q(m_2V_t)_t^{t+\Delta t}dx=\int_t^{t+\Delta t}\{\int_0^1[V_tm_{2t}-V_xm_{2x}+\lambda m_2\int_0^T K(s,\tau)V(\tau,x)d\tau+$$
$$+\delta(x-x_0)g(x)u(t)m_2]dx-\alpha V(s,1)m_2(s,1)\}ds$$

С учетом этого тождества (18) и (17) получим

$$\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}=\min_{\substack{u(\tau)\in p\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\frac{1}{\Delta t}\{\beta\int_t^{t+\Delta t}|u(\tau)|\,d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\{\int_0^1[V_tm_{2t}-V_xm_{2x}+\lambda m_2\int_0^T K(s,\tau)V(\tau,x)d\tau+$$
$$+\delta(x-x_0)g(x)u(t)m_2]dx-\alpha V(s,1)m_2(s,1)\}ds+$$
$$+\int_0^1 m_1(t,x)\Delta V(t,x)-\Delta m_2(t,x)V_t(t+\Delta t,x)]dx+o(\Delta t)+\delta(t,W(t,x);\Delta W(t,x))]\}$$

Отсюда в силу равенств:

1) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}|u(\tau)|\,d\tau=|u(t)|$

2) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\{\int\limits_{0}^{1}[V_t m_{2t}-V_x m_{2x}]dx+\alpha V(s,1)m_2(s,1)\}ds=$

$=\int\limits_{0}^{1}[V_t m_{2t}-V_x m_{2x}]dx+\alpha V(t,1)m_2(t,1)$

3) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\int\limits_{0}^{1}m_2(s,x)\left(\lambda\int\limits_{0}^{T}K(s,\tau)V(\tau,x)d\tau+\delta(x-x_0)g(x)u(s)\right)dxds=$

$=\int\limits_{0}^{1}m_2(t,x)\left(\lambda\int\limits_{0}^{T}K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+\delta(x-x_0)g(x)u(t)\right)dx$

4) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta V(t,x)}{\Delta t}=V_t(t,x)$, $\quad\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m_2(t,x)}{\Delta t}=m_{2t}(t,x)$

При $\Delta t\to 0$ имеем уравнение:

$$-\frac{\partial S[t,W]}{\partial t}=\min_{u(\tau)\in p}\{\beta\,|u(t)|+u(t)\int\limits_{0}^{1}\delta(x-x_0)g(x)m_2(t,x)dx+$$
$$\int\limits_{0}^{1}\left[V_t(t,x)\mathrm{m}_1(t,x)-V_x(t,x)m_{2x}(t,x)+\lambda\int\limits_{0}^{T}K(t,\tau)V(t,x)d\tau\right]dx+ \qquad (19)$$
$$+\alpha V(t,1)m_2(t,1)\}.$$

Это уравнение является уравнением Беллмана-Егорова. Согласно определению функционала $S[t,W]$ (см. формулу (13)), его следует рассматривать вместе с условиями

$$S[t,W(t,x)]\ge 0;S[T,W(T,x)]=\int\limits_{Q}\left\|W(T,x)-\xi(x)\right\|^2dx \qquad (20)$$

Таким образом, для решения задачи синтеза необходимо найти явный вид функционала $S[t,W]$ как решение уравнения Беллмана-Егорова (19), удовлетворяющее условием (20), т.е. как решение задачи Коши-Беллмана-Егорова.

Литература:

1. Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами – Киев: Вища школа, 1988 -280с.
2. Керимбеков А., Дуйшеналиева У.Э. Задача подвижного точечного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями. // Журнал «Вестник КРСУ», –2016, Т.16, №5. – С. 51-57.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Карабакиров К.Р.