ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Алымкулов К., Турсунов Д.А., Азимов Б.А.

ЖЫЛМА ЭМЕС КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН ЖАЛПЫЛАНГАН ЧЕК АРАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР МЕТОДУ

Алымкулов К., Турсунов Д.А., Азимов Б.А.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕГЛАДКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

K. Alymkulov, D.A. Tursunov, B.A. Azimov

THE GENERALIZED METHOD OF BOUNDARY FUNCTIONS FOR SYSTEM ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A NONSMOOTH COEFFICIENT

УДК: 517.928

Рассматривается система сингулярно возмущенных линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с негладким коэффициентом. С помощью обобщенного метода погранфункций построено асимптоти-ческое разложение решения задачи Коши для этой системы.

***Ключевые слова**: задача Коши, бисингулярная задача, асимптотика, обобщенный метод пограничных функций, малый параметр, сингулярное возмущение, асимптотический ряд.*

Макалада жылма эмес коэффициентке ээ болгон сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдемелердин системасмы үчүн Кошинин маселеси каралды. Каралып жаткан Кашинин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасын тургузуу үчүн жалпыланган чектик функциялар методу колдонулду.

***Негизги сөздөр**: Кошинин маселеси, бисингулядык маселе у чекити, Эйринин тиңдемеси, Эйринин функциялары, , асимптотика, жалпыланган чектик функциялар методу, сингулярдык козголуу*

We consider the Cauchy problem for a singularly perturbed system of ordinary differential equations with a nonsmooth coefficient. Here by the generalized boundary-value method for constructed a complete asymptotic expansion of the solution of the bisingular Cauchy problem.

***Keywords:** problem Cauchy, singular perturbed, bisingular problem, asymptotic, generalized method boundary functions, small parameter, asymptotic series.*

Постановка задачи. Рассматривается задача Коши

$$\varepsilon Y'(x)+\sqrt{x}AY(x)=F(x),\ 0<x\le T, \tag{1}$$

$$Y(0)=Y^0, \tag{2}$$

где 0<ε – скалярный малый параметр, $F(x),\ Y(x),\ Y^0\in R^n$, A – положи-тельная квадратная матрица n-го порядка с собственными значениями $0<\lambda_i$, λ_I – const, $\lambda_i\neq\lambda_j$ $i\neq j$, $i, j = 1,2, \dots, n$;

$$F(x)=\sum_{j=0}^{\infty}x^jF_j, x\to 0.$$

Известно, что существует такая невырожденная квадратная матрица B порядка n, для которого справедливо равенство

$$B^{-1}AB = D,$$

где $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ – диагональная матрица, det (B) ≠ 0.

Применяя подстановку $Y(x) = BZ(x)$ к задаче (1) - (2), затем полученные равенства, умножая слева на матрицу B^{-1}, приведем к стандартному виду

$$\varepsilon Z'(x) + \sqrt{x}DZ(x) = \tilde{F}(x),\ 0 < x \le T, \tag{3}$$

$$Z(0) = Z^0, \tag{4}$$

где $\widetilde{F}(x) = B^{-1}F(x),\ Z^0 = B^{-1}Y^0$.

Решения задачи Коши (3)-(4) ищем обобщенным методом погранфункций [3,4]

$$Z(x) = \mu^{-1}W_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(Z_k(x) + W_k(t)), \tag{5}$$

где $\varepsilon = \mu^3,\ t = x/\mu^2$.

Подставляя соотношение (5) в равенство (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\mu^3 Z'_k(x) + \sqrt{x}DZ_k(x)\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(W'_{k-1}(t) + \sqrt{t}DW_{k-1}(t)\right) = \tilde{F}(x) - H(x) + H(x), \tag{6}$$

где $H(x) = H_0 + \varepsilon\dfrac{H_1}{\sqrt{x}} + H_2 + \varepsilon^3\dfrac{H_3}{\sqrt{x}} + \ldots + H_{2n} + \varepsilon^{2n+1}\dfrac{H_{2n+1}}{\sqrt{x}} + \ldots$, H_k – пока неизвестные вектор матрицы.

Из равенства (6) имеем:

$$\sqrt{x}DZ_0(x) = \tilde{F}(x) - H_0,$$

$$\sqrt{x}DZ_1(x) = 0,\ \sqrt{x}DZ_2(x) = 0,\ k = 0,1,\ldots$$

$$Z'_{3k-3}(x) + \sqrt{x}DZ_{3k}(x) = \begin{cases} -H_k & \text{при } 3k \text{ - четном,} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}H_k & \text{при } 3k \text{ - нечетном,} \end{cases}$$

$$Z'_{3k-2}(x) + \sqrt{x}DZ_{3k+1}(x) = 0,\ Z'_{3k-1}(x) + \sqrt{x}DZ_{3k+2}(x) = 0,\ k \in N$$

Отсюда получаем

$$Z_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}D^{-1}\left(\tilde{F}(x) - H_0\right),$$

пусть $H_0 = \tilde{F}(0)$, тогда $Z_0(x) \in C[0,T],\ Z_0(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}x^k Z_{0,k+1}, x \to 0$,

Заметим, что

$$Z_{3k+1}(x) \equiv 0,\ Z_{3k+2}(x) \equiv 0,\ k = 0,1,\ldots;$$

$Z_{3k}(x) = \sqrt{x}\sum_{j=0}^{\infty}x^j Z_{3k,j+1},\ x \to 0,$ при $3k-$четном, если $H_k = -Z'_{3k-3}(0)$;

$Z_{3k}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}x^j Z_{3k,j}$, $x\to 0$, при $3k-$нечетном, если $H_k=-\lim_{x\to 0}\sqrt{x}Z'_{3k-3}(x)$.

Вспомогательный ряд $H(x)$ запишем в виде:

$$H(\mu^2 t)=H_0+\mu^2\frac{H_1}{\sqrt{t}}+\mu^6 H_2+\mu^8\frac{H_3}{\sqrt{t}}+\ldots+\mu^{6n}H_{2n}+\mu^{6n+2}\frac{H_{2n+1}}{\sqrt{t}}+\ldots$$

Из (6) имеем:

$$W'_{6k-1}(t)+\sqrt{t}DW_{6k-1}(t)=H_{2k},\ k=0,1,\ldots;$$

$$W'_{6k}(t)+\sqrt{t}DW_{6k}(t)=0,\ k=0,1,\ldots;$$

$$W'_{6k+1}(t)+\sqrt{t}DW_{6k+1}(t)=\frac{H_{2k+1}}{\sqrt{t}},\ k=0,1,\ldots;$$

$$W'_{6k+j}(t)+\sqrt{t}DW_{6k+j}(t)=0, j=2,3,4,\ k=0,1,\ldots$$

Начальное условие для функций $W_k(t)$ берем в виде:

$W_{-1}(0)=0$, $W_0=Z^0-Z_0(0)$, $W_k(0)=-Z_k(0)$, $k=1,2,\ldots$, т.е.

$W_{-1}(0)=0$, $W_0=Z^0$, $W_{6k+3}(0)=-Z_{6k+3}(0)$, $k=0,1,2,\ldots$; $W_{6k+j}(0)=0$, $j=0,1,2,4,5$.

Явные решения этих задач представимо виде, соответственно:

$$W_{6k-1}(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}\left(\int_0^t e^{\frac{2}{3}s^{3/2}D}ds\right)H_{2k}, k=0,1,\ldots,$$

$$W_0(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}Z^0,\ W_{6k+3}(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}Z_{6k+3}(0),\ k=0,1,2,\ldots$$

$$W_{6k+1}(t)=e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}D}\left(\int_0^t s^{-1/2}e^{\frac{2}{3}s^{3/2}D}ds\right)H_{2k+1},\ W_{6k+j}(x)\equiv 0, j=2,4,6,\ k=0,1,\ldots$$

Заметим, что матрицы-функции $W_0(t)$, $W_{6k+3}(t)$ – экспоненциально убывают при $t\to\infty$. А функций $W_{6k-1}(t)$, $W_{6k+1}(t)$ степенным ростом:

$$W_{6k-1}(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), W_{6k+1}(t)=O\left(\frac{1}{t}\right), t\to\infty,\ k=0,1,2,\ldots$$

А также справедливы соотношения

$$W_0(t)=W_{6k+3}(t)=W_{6k-1}(t)=O(1), W_{6k+1}(t)=O\left(\sqrt{t}\right), t\to 0,\ k=0,1,2,\ldots$$

Таким образом, нами определены все члены асимптотического разложения (5).

Для обоснования асимптотического разложения (5) оценим остаточный член этого ряда. Пусть

$$Z_m(x) = \mu^{-1} W_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{6m+3} \mu^k (Z_k(x) + W_k(t)),\ R_m(x) = Z(x) - Z_m(x),$$

Тогда для остаточной функции $R_m(x)$ получим задачу

$$\varepsilon R_m'(x) + \sqrt{x} D R_m(x) = -\varepsilon^{2m+2} Z'_{6m+3}(x),\ 0 < x \le T,$$

$$R_m(0) = 0.$$

Эта задача имеет единственное решение

$$R_m(x) = -\varepsilon^{2m+1} e^{-\frac{2}{3\varepsilon} x^{3/2} D} \int_0^x Z'_{6m+3}(s) e^{\frac{2}{3\varepsilon} s^{3/2} D} ds,$$

и для него справедлива оценка $R_m(x)=O(\varepsilon^{2m+1})$, $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le T$.

Вывод. Обобщенным методом пограничных функций К. Алымкулова построено равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с негладким коэффициентом в действительной области. А также получена оценка для остаточной функции асимптотического ряда, т.е. асимптотическое разложение обосновано.

Список литературы:

1. [1] Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с точкой поворота, Дифференциальные уравнения. 27:9(1991), 1505-1515 стр.
2. [2] Бобочко В. Н. Нестабильные и кратные элементы спектра в системе сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, Изв. вузов. Матем., 9(1998), 3–13 стр.
3. [3] Алымкулов К., Асылбеков Т. Д., Долбеева С. Ф., Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка, Матем. заметки, 94:4 (2013), 483–487; Math. Notes, 94:4 (2013), 451–454 стр.
4. [4] Алымкулов К., Турсунов Д.А., Кожобеков К.Г. Обобщенный метод пограничных функций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота, Известия КГТУ им И. Раззакова, 39:1 (2016), 13-16 стр.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.