Алымбаев А.Т.

ДЭЭРЛИК СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН СЫЗЫКТУУ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИ ЧЫГЫРУУ ЫКМАСЫНЫН БИРИ

Алымбаев А.Т.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

A.T. Alymbaev

ON ONE APPROXIMATE METHOD OF INVESTIGATION OF A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS.

УДК: 517.968

Макалда квазисызыктуу теңдемелердин системасы үчүн сызыктуу чектик маселенин чыгарылышын тургузуу маселеси каралат. Чектик маселени изилдөө, интегралдык теңдемени изилдөө маселесине келтирилет. Интегралдык теңдеменин жакындаштырылган чыгарылышы анын так чыгарылышына умтулуусу далилденип, алардын ортосунда тактыктын чеги аныкталат.

Негизги создор: *Чектик маселе, квазисызыктуу теңдемелердин системасы, тактыктын чеги.*

В статье изучаются вопросы приближенного решения краевой задачи системы квазилинейных дифференциальных уравнений. Задача исследования решения краевой задачи сводится к задаче исследования решений системы интегральных уравнений. Доказана сходимость приближенных решений к точному решению краевой задачи. Определена оценка точности между приближенным и точным решением.

Ключевые слова: *краевая задача, квазилинейное дифференциальное уравнение, оценка точности.*

In this paper, we study questions of the approximate solution of a boundary-value problem for a system of quasilinear differential equations. The problem of investigating the solution of the boundary value problem reduces to the problem of studying solutions of a system of integral equations. The convergence of approximate solutions to the exact solution of the boundary value problem is proved. An estimate of the accuracy between the approximate and exact solution is determined.

Keywords: *boundary value problem, quasilinear differential equation, accuracy estimation.*

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t,x), \tag{1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d. \tag{2}$$

где $x, f, d - n-$мерные векторы, $A, B-$постоянные $n \times n-$мерные матрицы, причем матрица B такова, что $\det B \neq 0$, $P(t) - n \times n-$мерная переменная матрица такая, что у линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x,$$

существует фундаментальная система решений $V = V(t)$ $(V(0) = E)$, такая, что $C_1 = \max_t |V(t)|$, $C_2 = \max_t |V(t) - E|$, $C_3 = \max_t |V^{-1}(t)|$, $C_4 = \max_t |V(T) - V(t)|$, $|c| = d_1$.

Пусть n -мерная вектор-функция $f(t,x)$ определена в области

$$(t,x) \in [0, T] \times D, \tag{3}$$

где D - ограниченная, замкнутая область евклидового пространства E_n и удовлетворяет условиям:

$$|f(t,x)| \leq M, \tag{4}$$

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \leq K|x' - x''|. \tag{5}$$

Через D_+ обозначим множество точек $c \in E_n$ содержащихся в D вместе со своей $\gamma = C_2 d_1 + \left(\frac{T}{2} C_1 C_3 + C_4\right) M + \beta$ - окрестность. Пусть

$$D_+ \neq \varnothing . \tag{6}$$

Предположим также, что

$$\rho = \lambda_{\max}(Q) < 1, \quad \left(Q = \left(\frac{T}{2} C_1 C_3 + C_4\right) K \right). \tag{7}$$

Семейство функций $x = x(t,c)$ определяем как решение интегрального уравнения вида

$$\begin{aligned} x(t,c) = V(t)c + \int_0^t \left[V(t)V^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau,c)) - \frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau,c)) d\tau \right] d\tau - \\ -\frac{t}{T}\int_0^T [V(t) - V(T)] f(\tau, x(\tau,c)) d\tau + \frac{t}{T}[B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c]. \end{aligned} \tag{8}$$

В невырожденном случае (8) имеет вид

$$x(t,c) = V(t)(B^{-1}A + V(T))^{-1} B^{-1} d + \int_0^T G(t,\tau) f(\tau, x(\tau,c)) d\tau . \tag{9}$$

Теорема. Пусть $x = x^0(t,c)$ решение краевой задачи (1), (2), удовлетворяющее в области (3) условиям (4)-(7). Тогда $x^0(t,c) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,c)$, равномерно относительно $(t,c) \in [0,\ T] \times D_+$

$$\left| x^0(t,c) - x_m(t,c) \right| \le Q^m (E - Q)^{-1} \gamma, \quad (m = 1, 2, ...)$$

где $x_m(t,c)$ определяется согласно

$$x_0(t,c) = c ,$$

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t,c) = V(t)c + \int_0^t \left[V(t)V^{-1}(\tau) f(\tau, x_m(\tau,c)) - \frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(\tau) f(\tau, x_m(\tau,c)) d\tau \right] d\tau - \\ -\frac{t}{T}\int_0^T [V(t) - V(T)] f(\tau, x_m(\tau,c)) d\tau + \frac{t}{T}[B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c], \ m = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. Учитывая лемму 2.2.1 [2] из (10) имеем

$$\begin{aligned} \left| x_{m+1}(t,c) - c \right| \le \left\| V(t) - E \right\| \left| c \right| + \frac{T}{2} \left\| V(t) \right\| \left\| V^{-1}(t) \right\| \left\| f \right\| + \left\| V(T) - V(t) \right\| \left\| f \right\| + \\ + \left| B^{-1}d - (B^{-1}A + V(t))c \right| \le C_2 d_1 + \frac{T}{2} C_1 C_3 M + C_4 M + \beta = \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, если $c \in D_f$, то $x_{m+1}(t,c) \in D$ для $m = 1, 2, ...$. Оценим разность

$$\begin{aligned} \left| x_{m+1}(t,c) - x_m(t,c) \right| = \int_0^t V(t) \big[f(\tau, x_m(\tau,c)) - f(\tau, x_{m-1}(\tau,c)) - \\ -\frac{1}{T}\int_0^T V^{-1}(\tau) (f(\tau, x_m(\tau,c)) - f(\tau, x_{m-1}(\tau,c))) d\tau \big] d\tau - \\ -\frac{t}{T}\int_0^T [V(t) - V(T)] (f(\tau, x_m(\tau,c)) - f(\tau, x_{m-1}(\tau,c))) d\tau. \end{aligned}$$

С учетом условий (4)-(7) и леммы 2.2.1 [2] имеем

$$\left| x_{m+1}(t,c) - x_m(t,c) \right| \le Q \left| x_{m+1}(t,c) - x_m(t,c) \right| \le ... \le Q^m \left| x_1(t,c) - c \right| \le Q^m \gamma .$$

Так как

$$\left|x_{m+k}(t,c)-x_m(t,c)\right| \le \left|x_{m+k}(t,c)-x_{m+k-1}(t,c)\right| + \left|x_{m+k-1}(t,c)-x_{m+k-2}(t,c)\right| +$$
$$+\ldots+\left|x_{m+1}(t,c)-x_m(t,c)\right| \le Q^m \sum_{i=0}^{k-1} Q^i \gamma = Q^m (E-Q)^{-1}\gamma,$$

то при $k \to \infty$ получим оценку

$$\left|x^0(t,c)-x_m(t,c)\right| \le Q^m (E-Q)^{-1}\gamma, \quad m=1,2,\ldots$$

которая на основании условий (7) следует сходимость схемы (10) к решению интегрального уравнения (8). Согласно условию теоремы функция $x = x^0(t,x_0)$ является решением краевой задачи (1), (2), то из этого следует

$$\Delta(c) = \frac{1}{T}[B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c] - \frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(\tau) f(\tau, x^0(\tau,c))d\tau = 0.$$

Таким образом, существование решения краевой задачи (1), (2) сводится к существованию нулей функции $\Delta = \Delta(c)$ которая решается с помощью функции

$$\Delta_m(c) = \frac{1}{T}[B^{-1}d - (B^{-1}A + V(T))c] - \frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(\tau) f(\tau, x_m(\tau,c))d\tau.$$

Пример: Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}x, \\ &\frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}y, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &x(0) + x(1) = 1, \\ &y(0) + y(1) = 2. \end{aligned} \tag{12}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Фундаментальная система решений $V(t)$ однородной системы уравнений определяется согласно матричной функции

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{4t} \\ -e^t & e^{4t} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Вычислим обратную матрицу $V^{-1}(t)$

$$\det\begin{pmatrix} e^t & 2e^{4t} \\ -e^t & e^{4t} \end{pmatrix} = 3e^{5t} \ne 0$$

$$a_{11} = e^{4t},\ a_{12} = e^t,\ a_{21} = -2e^{4t},\ a_{22} = e^t,$$

следовательно

$$V^{-1}(t) = \frac{1}{3e^{5t}}\begin{pmatrix} e^{4t} & -2e^{4t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Обозначим через A, B, $V(t)$, d матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ V(1) = \begin{pmatrix} e & 2e^4 \\ -e & e^4 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Вычислим:

$$B^{-1}d=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A+V(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e&2e^4\\-e&e^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+e&2e^4\\-e&1+e^4\end{pmatrix},$$

$$\left(B^{-1}A+V(1)\right)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+e&2e^4\\-e&1+e^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+e)c_1+2e^4c_2\\-ec_1+e^4c_2\end{pmatrix}.$$

На основании этих обозначений, краевую задачу (11), (13) приводим к интегральному уравнению

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&2e^{4t}\\-e^t&e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\int_0^t\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^t&2e^{4t}\\-e^t&e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\tau}&-2e^{-\tau}\\e^{-4\tau}&e^{-4\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{2\tau}x(\tau)\\e^{2\tau}y(\tau)\end{pmatrix}-\right.$$
$$\left.-\int_0^1\begin{pmatrix}e&2e^4\\-e&e^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\tau}&-2e^{-\tau}\\e^{-4\tau}&e^{-4\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{2\tau}x(\tau)\\e^{2\tau}y(\tau)\end{pmatrix}d\tau\right]d\tau+t\begin{pmatrix}1-(1+e)c_1-2e^4c_2\\2+ec_1-e^4c_2\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Вычислим:

$$\begin{pmatrix}e^t&2e^{4t}\\-e^t&e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^t+2c_2e^{4t}\\-c_1e^t+c_2e^{4t}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}e^{-\tau}&-2e^{-\tau}\\e^{-4\tau}&e^{-4\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{2\tau}x\\e^{2\tau}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^{\tau}x-2e^{\tau}y\\3e^{-2\tau}x+e^{-2\tau}y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}e^t&2e^{4t}\\-e^t&e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{\tau}x-2e^{\tau}y\\3e^{-2\tau}x+e^{-2\tau}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t(3e^{\tau}x-2e^{\tau}y)+2e^{4t}(3e^{-2\tau}x+e^{-2\tau}y)\\-e^t(3e^{\tau}x-2e^{\tau}y)+e^{4t}(3e^{-2\tau}x+e^{-2\tau}y)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}e&2e^4\\-e&e^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{s}x-2e^{s}y\\3e^{-2s}x+e^{-2s}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e(3e^{s}x-2e^{s}y)e+2e^4(3e^{-2s}x+e^{-2s}y)\\-e(3e^{s}x-2e^{s}y)+e^4(3e^{-2s}x+e^{-2s}y)\end{pmatrix}.$$

На основании этих вычислений интегральное уравнение (17) представим в виде

$$x\ (t)=c_1e^t+2c_2e^{4t}+\frac{1}{3}\int_0^t\Big[\Big(e^t(3e^{\tau}x(\tau)-2e^{\tau}y\ (\tau))+2e^{4t}(3e^{-2\tau}x(\tau)+e^{-2\tau}y(\tau))\Big)-$$
$$-\int_0^1\Big(e(3e^{s}x(s)-2e^{s}y(s))+2e^4(3e^{-2s}x(s)+e^{-2s}y(s))\Big)ds\Big]d\tau+$$
$$+t(1-(1+e)c_1-2e^4c_2), \tag{18}$$
$$y(t)=-c_1e^t+c_2e^{4t}+\frac{1}{3}\int_0^t\Big[\Big(-e^t(3e^{\tau}x(\tau)-2e^{\tau}y(\tau))+e^{4t}(3e^{-2\tau}x(\tau)+e^{-2\tau}y(\tau))\Big)-$$
$$-\int_0^1\Big(-e(3e^{s}x(s)-2e^{s}y(s))+e^4(3e^{-2s}x(s)+e^{-2s}y(s))\Big)ds\Big]d\tau+t(2+c_1e-c_2e^4).$$

Решаем интегральное уравнение (18) методом последовательных приближений, положив $x_0(t)=c_1,\ \ y_0(t)=c_2$

$$x_k(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} + \frac{1}{3}\int_0^t \Big[\Big(e^t (3e^{2\tau} x_{k-1}(\tau) - 2e^{2\tau} y_{k-1}(\tau)) +$$

$$+2e^{4t}(3e^{-\tau} x_{k-1}(\tau) + e^{-\tau} y_{k-1}(\tau)) \Big) - \int_0^1 \Big((3e^{2\tau} x_{k-1}(s) - 2e^{2\tau} y_{k-1}(s))e +$$

$$+2(3e^{-\tau} x_{k-1}(s) + e^{-\tau} y_{k-1}(s))e^4 \Big) ds \Big] d\tau + t(1 - (1+e)c_1 - 2e^4 c_2),$$

$$y_k(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{4t} + \frac{1}{3}\int_0^t \Big[\Big(-e^t (3e^{2\tau} x_{k-1}(\tau) - 2e^{2\tau} y_{k-1}(\tau)) +$$

$$+e^{4t}(3e^{-\tau} x_{k-1}(\tau) + e^{-\tau} y_{k-1}(\tau)) \Big) - \int_0^1 \Big(-(3e^{2s} x_{k-1}(s) - 2e^{2s} y_{k-1}(s))e + \qquad (19)$$

$$+(3e^{-s} x_{k-1}(s) + e^{-s} y_{k-1}(s))e^4 \Big) ds \Big] d\tau + t(2 + c_1 e - c_2 e^4).$$

Определяем параметры c_1, c_2 как решение системы уравнений

$$1 - (1+e)c_1 - 2e^4 c_2 = \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(e(3e^s c_1 - 2e^s c_2) + 2e^4 (3e^{-2s} c_1 + e^{-2s} c_2) \Big) ds,$$

$$2 + c_1 - e^4 c_2 = \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(-e(3e^s c_1 - 2e^s c_2) + e^4 (3e^{-2s} c_1 + e^{-2s} c_2) \Big) ds.$$

Вычислим интегралы

$$\int_0^1 e^{-2s} ds = -\frac{1}{2} e^{-2s}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = \frac{1}{2}\frac{(e^2 - 1)}{e^2}, \quad \int_0^1 e^s ds = -e^s\Big|_0^1 = e - 1.$$

Представим (20) в виде

$$1 - (1+e)c_1 - 2e^4 c_2 = \frac{1}{3}\left[3e(e-1)c_1 - 2e(e-1)c_2 + 3e^4 \frac{e^2 - 1}{e^2} c_1 + e^4 \frac{e^2 - 1}{e^2} c_2 \right],$$

$$2 + ec_1 - e^4 c_2 = \frac{1}{3}\left[(-3e(e-1)c_1 + 2e(e-1)c_2 + \frac{3}{2} e^4 \frac{e^2 - 1}{e^2} c_1 + \frac{1}{2} e^4 \frac{e^2 - 1}{e^2} c_2 \right].$$

Отсюда получим

$$(1 + e^4)c_1 + \left(\frac{7}{3} e^4 - e^2 + \frac{2}{3} e \right) c_2 = 1,$$

$$\left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 \right) c_1 + \left(\frac{7}{6} e^4 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{2}{3} e \right) c_2 = 2.$$

Так как $\varepsilon \approx 2,71827$, то $e^2 = 7,38899,\ e^4 = 54,59720$,

$$e^4 + 1 = 55,59720,$$

$$\frac{7}{3} e^4 - e^2 + \frac{2}{3} e = \frac{7}{3} \cdot 54,59720 - 7,38899 + \frac{2}{3} \cdot 2,71827 = 121,81666,$$

$$\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{2} \cdot 54,59720 - \frac{1}{2} \cdot 7,38899 = 23,604105,$$

$$\frac{7}{6} e^4 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{2}{3} e = \frac{7}{6} \cdot 54,59720 + \frac{1}{2} \cdot 7,38899 - \frac{2}{3} \cdot 2,71827 = 65,57905.$$

На основании этих вычислений, получим

$$55,5972 \cdot c_1 + 121,81666 \cdot c_2 = 1,$$
$$23,604105 \cdot c_1 + 65,57905 \cdot c_2 = 2.$$

Решив систему получим

$$c_1 = -0,23105, \qquad c_2 = 0,113659.$$

Поставляя эти значении в (19) при $k = 1$, получим

$$x_1(t) = -0,23105e^t + 0,227318e^{4t} - \frac{1}{3}e^t\int_0^t 0,69315e^{\tau}d\tau - \frac{1}{3}e^t\int_0^t 0,227318e^{\tau}d\tau -$$
$$-\frac{1}{3}e^{4t}\int_0^t 1,3863e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{3}e^{4t}\int_0^t 0,227318e^{-2\tau}d\tau = -0,23105e^t + 0,227318e^{4t} -$$
$$-0,23105e^t(e^t - 1) - 0,075773e^t(e^t - 1) + 0,23105e^{4t}(e^{-2t} - 1) - 0,0378863e^{4t}(e^{-2t} - 1),$$
$$y_1(t) = 0,23105e^t + 0,113659e^{4t} + \frac{1}{3}e^t\int_0^t 0,69315e^{\tau}d\tau - \frac{1}{3}e^t\int_0^t 0,227318e^{\tau}d\tau -$$
$$-\frac{1}{3}e^{4t}\int_0^t 0,69315e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{3}e^{4t}\int_0^t 0,113659e^{-2\tau}d\tau = 0,23105e^t + 0,113659e^{4t} +$$
$$+0,23105e^t(e^t - 1) - 0,075773e^t(e^t - 1) - 0,115526e^{4t}(e^{-2t} - 1) - 0,0189432e^{4t}(e^{-2t} - 1).$$

Таким образом, в первом получим решение краевой задачи (11), (12)

$$x_1(t) = -0,23105e^t + 0,227318e^{4t} - 0,306823e^t(e^t - 1) + 0,1931637^{4t}(e^{-2t} - 1),$$
$$y_1(t) = 0,23105e^t + 0,113659e^{4t} + 0,155277e^t(e^t - 1) - 0,1344692e^{4t}(e^{-2t} - 1).$$

Литература:

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асипмтотические методы исследования краевых задач. – Бишкек: 2004,– 175 с.
2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования краевых задач. – Киев.: Наукова Думка, 1986, – 220 с.
3. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016, №12-1 (64), – 17-23 с.
4. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием // Проблемы современной науки и образования. – Иваново, 2017, №3(85), – 6-16 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.