Асанов Р.А.

АРГУМЕНТТЕРИ БӨЛҮШТҮРҮЛГӨН МАТРИЦАЛЫК ЯДРОЛУУ ФРЕДГОЛЬМДУН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН БИР КЛАССЫ

Асанов Р.А.

ОДИН КЛАСС СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМИ МАТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ

R.A. Asanov

A CLASS OF SYSTEMS OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH THE DEGENERATE MATRIX KERNELS

УДК: 517. 968

Жаңы ыкманын негизинде аргументтери бөлүштүрүлгөн ядролу Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын бир классын чыгаруу сызыктуу алгебралык теңдемелердин системасын чыгарууга эквиваленттүү экендиги көрсөтүлгөн.

Бул системанын чыгарылыштарынын жашашы жана жалгыздыгы изилденген.

Негизги сөздөр: *чыгарылыштары, системалар, сызыктуу, теңдемелер, интегралдык,алгебралык, Фредгольм, үчүнчү түр, эквиваленттүү.*

На основе нового подхода показано, что решения для одного класса систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденными ядрами эквивалентно решению систем линейных алгебраических уравнений. Изучены вопросы существования и единственности решения для этой системы.

Ключевые слова: *Решения, систем, линейных, уравнений, интегральных, алгебраических, Фредгольма, третьего рода, эквивалентно.*

On the basis of the new approach it is shown that solutions for a class of systems of linear integral equations of the third kind with degenerate kernels are equivalent to solving systems of linear algebraic equations. The questions of existence and uniqueness of the solution for this system are studied.

Key words: *Solutions, systems, linear, equations, integral, algebraic, Fredholm, the third kind, is equivalent.*

Рассмотрим следующие системы

$$P(x)u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_j(x) \int_a^b B_j(y)u(y)\,dy + f(x), x \in [a,b], \tag{1}$$

где $P(x)$ известная непрерывная функция на $[a,b]$, $A_j(x)$ и $B_j(x)$ $n \times n-$ мерные известные непрерывные матричные функции на $[a,b]$ $(j=1,\dots,m)$, $f(x)=(f_i(x))-n-$ мерная известная непрерывная вектор-функция на $[a,b]$, $u(x)=(u_i(x))-n-$ мерная неизвестная непрерывная вектор-функция на $[a,b]$, $\lambda -$ действительный параметр, $a<b, P(x_l)=0, x_l \in [a,b], l=1,2,\dots,k.$

Многие вопросы для интегральных уравнений исследовались в [1-12] . В частности в [3] для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В работах [5 - 6] для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В данной работе доказаны теоремы единственности и существования решения для систем интегральных уравнений (1).

Обозначим через $C_n[a,b]-$ пространство всех $n-$ мерных вектор $-$ функций с элементами из $C[a,b]$.

Для векторов $u=(u_1,\dots,u_n)^T$, $v=(v_1,\dots,v_n)^T \in R^n$ определим скалярное произведение по формуле

$$<u,v>=u_1v_1+\dots+u_nv_n.$$

Всюду будем предполагать, что

$$P(x)=\prod_{l=1}^{k}P_l(x), P_l(x_l)=0, P_l(x) m\, C[a,b], \tag{1}$$

$$P_l(x)\neq 0 \text{ при } \quad x m[a,b] \text{ и } x\neq x_l, l=1,\ldots,k.$$

Предположим выполнения следующих условий:

а) Для всех $l=1,\ldots,k$ и $j=1,\ldots,m$ $A_{l,j}(x)-n\times n-$мерные матричные функции являются непрерывными матричными функциями на $[a,b]$, где

$$A_{0,j}(x)=A_j(x), A_{l,j}(x)\frac{1}{P_l(x)}\left[A_{l-1}(x)-A_{l-1,j}(x_l)\right].$$

б) Для всех $l=1,\ldots,k$ $F_l(x)-n-$ мерные вектор-функции являются непрерывными вектор-функциями на $[a,b]$, где $F_0(x)=f(x), F_l(x)=\dfrac{1}{P_l(x)}\left[F_{l-1}(x)-F_{l-1}(x_l)\right], x\, m[a,b].$

Теорема. Пусть выполняются условия (2), а) и б). Тогда если система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(x_1)C_j+f(x_1)=0,\\
\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{1,j}(x_2)C_j+F_1(x_2)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{k-1,j}(x_k)C_j+F_{k-1}(x_k)=0,\\
C_j=\lambda\sum_{j=1}^{m}\left[\int_a^b B_j(y)A_{k,l}(y)dy\right]C_j+\\
+\int_a^b B_j(y)F_k(y)dy, j=1,\ldots,m,
\end{gathered} \tag{3}$$

относительно неизвестных векторов $C_j=(C_{j1},\ldots,C_{jn})^T$, $j=1,\ldots,m$ имеет единственное решения, то систем интегральных уравнений (1) в пространстве $C_n[a,b]$ имеет единственное решение представимое в виде

$$u(x)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{k,j}(x)C_j+F_k(x), x\, m[a,b]; \tag{4}$$

1) если система линейных алгебраических уравнений (3) несовместимы, то в пространстве $C_n[a,b]$ не имеет решения;

2) если система линейных алгебраических уравнений (3) имеет бесконечное число решений зависящий от q параметров, то система интегральных уравнений (1) в пространстве $C_n[a,b]$ имеет бесконечное число решений зависящих от q параметров. В этом случае, общее решения системы (1) определяется по формуле (4).

Доказательство. Сначала, пусть $u(t) m\, C_n[a,b]$ является решениям системы (1). Тогда, полагая $x=x_1$ из (1) имеем

$$\lambda\sum_{j=1}^{m}A_j(x_1)\int_a^b B_j(y)u(y)dy+f(x_1)=0, \tag{5}$$

Вычитая (5) из (1) получим

$$\prod_{l=1}^{k} P_l\left(x\right)u(x)=\lambda\sum_{j=1}^{m}[A_j\left(x\right)-A_j\left(x_1\right)]\int_a^b B_j\left(y\right)u\left(y\right)dy+f\left(x\right)-f\left(x_1\right)=0.$$

Отсюда учитывая условия а) и б)

$$\prod_{l=2}^{k} P_l\left(x\right)u(x)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{1,j}\left(x\right)\int_a^b B_j\left(y\right)u\left(y\right)dy+F_1\left(x\right),xm\left[a,b\right]. \tag{6}$$

Если $k=1,$ то

$$\prod_{l=2}^{k} P_l\left(x\right)=1,x\ m\left[a,b\right].$$

В случае, когда $k\geq 2$ полагая $x=x_2$ из (6) имеем

$$\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{1,j}\left(x_2\right)\int_a^b B_j\left(y\right)u\left(y\right)dy+F_1\left(x_2\right)=0. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (6) и учитывая условию а) и б) получим

$$\prod_{l=3}^{k} P_l\left(x\right)u\left(x\right)=\lambda\sum_{j=1}^{j=1m}A_{2,j}\left(x\right)\int_a^b B_j\left(y\right)u\left(y\right)dy+F_2\left(x\right),xm\left[a,b\right]. \tag{8}$$

Если $k=2,$ то $\prod_{l=3}^{k} P_l\left(x\right)=1,x\ m\left[a,b\right].$

В случае, когда $k\geq 3,$ продолжая этот процесс убедимся, что решение системы (1) $u(x)$ удовлетворяют условию (3) и определяется по формуле (4).

Наоборот, пусть $u\left(t\right)m\,C_n\left[a,b\right]$ определяется по формуле (4) и удовлетворяют условию (3).

Умножая (4) на $P_k\left(x\right)$ и в силу (3) получим

$$P_k\left(x\right)u\left(x\right)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{k-1,j}\left(x\right)C_j+F_{k-1}\left(x\right),xm\left[a,b\right]. \tag{9}$$

Далее умножая (9) на $P_{k-1}(x)$ и учитывая условию (3) получим

$$P_{k-1}(x)P_k\left(x\right)u\left(x\right)=\lambda\sum_{j=1}^{m}A_{k-2,j}\left(x\right)C_j+F_{k-2}\left(x\right),x\ m\left[a,b\right]. \tag{10}$$

Продолжая этот процесс по отношению к системе (10) и учитывая условие (3) убедимся, что $u(t)$ является решением системы (1) теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему

$$x\left(x-1\right)\begin{pmatrix}u_1\left(x\right)\\ u_2\left(x\right)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 3\end{pmatrix}\int_0^1\begin{pmatrix}y^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\left(y\right)\\ u_2\left(y\right)\end{pmatrix}dy+\ +\begin{pmatrix}\propto_1 x^2+\propto_2 x+\propto_3\\ \beta_1 x^3+\beta_2 x+\beta_3\end{pmatrix},\ xm\left[0,1\right], \tag{11}$$

где $\lambda,\ \propto_1,\ \propto_2,\ \propto_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3-$ действительные параметры, нетрудно проверить, что для системы (11) выполняются условия (2), а) и б) при $a=0,b=1,$

$$n=2,m=1,k=2,x_1=0,x_2=1,P_1\left(x\right)=x,P_2\left(x\right)=x-1,$$

$$A_{0,1}\left(x\right)=A_1\left(x\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 3\end{pmatrix},\ B_1\left(y\right)=\begin{pmatrix}y^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix},\quad A_{1,1}\left(x\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_{2,1}\left(x\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$F_0(x)=f(x)=\begin{pmatrix}\propto_1 x^2+\propto_2 x+\propto_3\\ \beta_1 x^3+\beta_2 x+\beta_3\end{pmatrix},\ F_1(x)=\begin{pmatrix}\propto_1 x+\propto_2\\ \beta_1 x^3+\beta_2\end{pmatrix},\quad F_2(x)=\begin{pmatrix}\propto_1\\ \beta_1(x+1)\end{pmatrix},\ x\ m[a,b].$$

Тогда для системы (11) условия (3) записываются в следующим виде:

$$C_1=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix}=\int_0^1 B(y)\begin{pmatrix}u_1(y)\\ u_2(y)\end{pmatrix}dy,$$

$$\begin{cases}\lambda\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\propto_3\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \lambda\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\propto_1+\propto_2\\ \beta_1+\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{pmatrix}=\int_0^1\begin{pmatrix}y^2&0\\0&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\propto_1\\ \beta_1(y+1)\end{pmatrix}dy=\begin{pmatrix}\frac{\propto_1}{3}\\ \frac{5}{6}\beta_1\end{pmatrix}.\end{cases}\qquad(12)$$

Из (4) имеем
$$\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}=F_2(x)=\begin{pmatrix}\propto_1\\ \beta_1(x+1)\end{pmatrix},\qquad x\ m[0,1].\qquad(13)$$

Из условия (12) имеем, что система (11) имеет единственное решение в пространстве $C_2[0,1]$, определяемся по формуле (13) тогда и только тогда когда

$$\propto_2=-\propto_1,\propto_3=-\lambda\left(\frac{\propto_1}{3}+\frac{5}{3}\beta_1\right),\qquad \beta_2=-\frac{\propto_1}{3}\lambda-\beta_1,\qquad \beta_3=-\frac{5}{2}\beta_1\lambda\ .\quad(14)$$

Если нарушается хотя бы один из равенств (14), то система (11) не имеет решения в пространстве С2[0,1]

Список литературы:

1. Цалюк З.Б. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ, М., 1977, т.15, с.131-198.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН, 1959, т.127, №1, с.31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // ДАН, 1989, т.309, № 5, с.1052-1055.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. // ДАН, 2007, т.415, №1, с.14-17.
6. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // ДАН, 2010, т.430, №6, с.1-4.
7. Иманалиев М.И., Асанов А. Асанов Р.А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // ДАН, 2011, т.437, № 5, с.592-596.
8. Apartsyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. VSP, Utrecht, The Netherlands, 2003, 168 pages.
9. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. VSP, Utrecht, The Netherlands,1998, 276 pages.
10. Avyt Asanov, Kalyskan Matanova, Ruhidin Asanov. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind //Kuwait Journal of Science, 2017,Vol.44, No 1, pp.17-28.
11. Bukhgeim A.L. Volterra Equations and Inverse Problems. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 204 pages.
12. Denisov A.M. Elements of the Theory of Inverse Problems. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999, 272 pages.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.