*Асанов А., Уралиев А.А.*

# ТЕСКЕРИ УБАКЫТТАГЫ ЖЫЛУУЛУК ӨТКӨРҮҮЧҮЛҮКТҮН ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН АРАЛАШ МАСЕЛЕНИН БИР КЛАССЫ ЖӨНҮНДӨ

*Асанов А., Уралиев А.А.*

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*A. Asanov, A.A. Uraliev*

# ONE CLASS OF MIXED PROBLEMS FOR HEAT EQUATION WITH INVERSE TIME

*УДК: 517.968*

*Бул макалада тескери убакыттагы жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн аралаш маселенин чыгарылышынын жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденди. Библиогр. 4.*

***Негизги сөздөр**: Гриндин функциясы, Дирихленин формуласы, бөлүктөп интегралдоо.*

*В настоящей статье доказана теорема о единственности решений смешанной задачи для уравнения теплопроводности с обратным временем. Библиогр. 4.*

***Ключевые слова**: Функция Грина, формула Дирихле, интегрирование по частям.*

*In this article the theorem of uniqueness of solutions of the mixed problem for the heat equation with inverse time. Bibliography 4.*

***Key words:** Green's Function, Dirichlet formula, integration by parts.*

Рассмотрим уравнение

$$m(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad (t,x) \in G = \{(t,x):\ t_0 \le t \le T, \quad a \le x \le b\} \quad (1)$$

с начальным

$$u(t_0, x) = \varphi(x),\ x \in [a,b] \quad (2)$$

и граничным условиями

$$u(t,a) = u(t,b) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

Должно выполняться условие согласованности

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad \in \quad (*)$$

Здесь задача заключается в том, чтобы доказать единственность решения задачи (1)–(3).

Для решения поставленной задачи дополнительно рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(t,x) \quad (4)$$

с граничным условием

$$v(t,a) = v(t,b) = 0. \quad (5)$$

Для решения задачи (4), (5) построим функцию Грина.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x,y) = \begin{cases} A(y)(b-x),\ a \le y \le x, \\ B(y)(x-a),\ x \le y \le b. \end{cases}$$

По определению она должна быть при x = y непрерывна, т.е. A(y)(b – y) = B(y)(y – a) и первая производная должна терпеть разрыв I рода со скачком, равным –1, т.е. B(y)–(–A(y))=–1. Из этих двух уравнений находим

$$A(y) = -\frac{y-a}{b-a}, \quad B(y) = -\frac{b-y}{b-a}.$$

Имеем

$$G(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{(y-a)(b-x)}{b-a}, & a\le y\le x,\\ -\dfrac{(b-y)(x-a)}{b-a}, & x\le y\le b.\end{cases} \tag{6}$$

Тогда решением задачи (4), (5) является

$$v(t,x)=\int_a^b G(x,y)F(t,y)dy. \tag{7}$$

Если рассмотрим задачи (1), (3) как в (4)-(7), то имеем

$$u(t,x)=\int_a^b G(x,y)\left[m(y)\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}-f(t,y)\right]dy. \tag{8}$$

Интегрируем (8) по t от $t_0$ до t.

$$\int_{t_0}^t u(s,x)ds-\int_{t_0}^t\int_a^b G(x,y)m(y)\frac{\partial u(s,y)}{\partial s}dyds=-\int_{t_0}^t\int_a^b G(x,y)f(s,y)dyds. \tag{9}$$

Для того, чтобы избавиться от производной искомых функций, первый повторный интеграл интегрируем по частям:

$$\int_{t_0}^t\int_a^b G(x,y)m(y)\frac{\partial u(s,y)}{\partial s}dyds=\int_a^b G(x,y)m(y)\left[\int_{t_0}^t\frac{\partial u(s,y)}{\partial s}ds\right]dy=$$

$$=\int_a^b G(x,y)m(y)u(t,y)dy-\int_a^b G(x,y)m(y)(y)dy. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\int_{t_0}^t u(s,x)ds+\int_a^b K(x,y)u(t,y)dy=H(t,x), \tag{11}$$

где

$$K(x,y)=-G(x,y)m(y),$$

$$H(t,x)=-\int_a^b G(x,y)m(y)(y)dy-\int_{t_0}^t\int_a^b G(x,y)f(s,y)dyds. \tag{12}$$

В силу (6) напишем более подробно функцию K(x,y)

$$K(x,y)=-G(x,y)m(y)=\begin{cases}\dfrac{(y-a)(b-x)}{b-a}m(y), & a\le y\le x,\\ \dfrac{(b-y)(x-a)}{b-a}m(y), & x\le y\le b.\end{cases} \tag{13}$$

В силу (13) уравнение (11) будем писать в виде

$$\int_{t_0}^t u(s,x)ds+\int_a^x A(x,y)u(t,y)dy+\int_x^b B(x,y)u(t,y)dy=H(t,x), \tag{14}$$

где, согласно (13),

$$A(x,y)=\frac{(y-a)(b-x)}{b-a}m(y),\quad a\le y\le x,$$

$$B(x,y)=\frac{(b-y)(x-a)}{b-a}m(y),\quad x\le y\le b. \tag{15}$$

Обе части уравнения (14) умножим на u(t,x), и интегрируя по области $G_t=\{(s,x)\colon t_0\le s\le t,\ a\le x\le b\}$ имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{s}u(\ ,x)u(s,x)d\,dxds+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{a}^{x}A(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{x}^{b}B(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds=\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}H(s,x)u(s,x)dxds. \tag{16}$$

Преобразуем первый тройной интеграл уравнения (16) следующим образом

$$\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{s}u(\tau,x)u(s,x)d\tau dxds=\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}u(\tau,x)d\tau\right)u(s,x)dsdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{t_0}^{s}u(\tau,x)d\tau\right)^2dtdx=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left.\left(\int_{t_0}^{s}u(\tau,x)d\tau\right)^2\right|_{s=t_0}^{s=t}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left(\int_{t_0}^{t}u(\tau,x)d\tau\right)^2dx. \tag{17}$$

Рассматри второе и третье слагаемые уравнения (16) вместе и во втором интеграле применим формулу Дирихле, а затем в этом интеграле поменяем ролями x и y

$$\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{a}^{x}A(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{x}^{b}B(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{a}^{x}A(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}B(x,y)u(s,y)u(s,x)dxdyds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{a}^{x}P(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds, \tag{18}$$

где

$$P(x,y)=A(x,y)+\ B(y,x). \tag{19}$$

В силу (15) из (19) имеем

$$P(x,y)=\frac{(y-a)(b-x)}{b-a}\left[m(y)+m(x)\right]. \tag{20}$$

Итак, преобразуем для второе и третье слагаемое уравнения (16) следующим образом

$$\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{a}^{x}P(x,y)u(s,y)u(s,x)dydxds=-\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\left[\int_{a}^{x}P(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)dy\right]u(s,x)dxds=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\left[\left.P(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)\right|_{y=a}^{y=x}-\int_{a}^{x}P_y(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)dy\right]u(s,x)dxds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\left[P(x,a)\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)+\int_{a}^{x}P_y(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)dy\right]u(s,x)dxds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\left[P(x,a)\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)^2+\int_{a}^{x}P_y(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)^2dy\right]dxds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[P(x,a)\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)^2\Bigg|_{x=a}^{x=b}-\int_{a}^{b}P_x(x,a)\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)^2dx\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{y}^{b}P_y(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)^2dxdyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[P(b,a)\left(\int_{a}^{b}u(s,z)dz\right)^2-\int_{a}^{b}P_x(x,a)\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)^2dx\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\left[P_y(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)^2\Bigg|_{x=y}^{x=b}-\int_{y}^{b}P_{xy}(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)^2dx\right]dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}P(b,a)\left(\int_{a}^{b}u(s,z)dz\right)^2ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}P_x(x,a)\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)^2dxds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}P_y(b,y)\left(\int_{y}^{b}u(s,z)dz\right)^2dyds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{y}^{b}P_{xy}(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)^2dxdyds. \qquad (21)$$

Подставляем (17), (21) в (16)

$$\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left(\int_{t_0}^{t}u(s,x)ds\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}P(b,a)\left(\int_{a}^{b}u(s,z)dz\right)^2ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}P_x(x,a)\left(\int_{a}^{x}u(s,z)dz\right)^2dxds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}P_y(b,y)\left(\int_{y}^{b}u(s,z)dz\right)^2dyds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}\int_{y}^{b}P_{xy}(x,y)\left(\int_{y}^{x}u(s,z)dz\right)^2dxdyds=\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}H(s,x)u(s,x)dxds. \qquad (22)$$

Напишем при H(t,x)=0 условие, для которое уравнение (22) имеет единственное решение u(t,x)≡0. Этими условиями являются

$$P(b,a)\ge 0,$$

$$P_x(x,a)\le 0,$$

$$P_y(b,y)\ge 0,$$

$$P_{xy}(x,y)\le 0. \qquad (23)$$

Из (20) находим

$$P_x(x,y)=\frac{(y-a)}{b-a}\big[(b-x)m'(x)-m(y)-m(x)\big],$$

$$P_y(x,y)=\frac{(b-x)}{b-a}\big[(y-a)m'(y)+m(y)+m(x)\big],$$

$$P_{xy}(x,y)=\frac{1}{b-a}\big[(b-x)m'(x)-(y-a)m'(y)-m(y)-m(x)\big]. \qquad (24)$$

Учитывая (24) из (23) имеем

$$P(b,a)=0\geq 0,$$

$$P_x(x,a)=0\leq 0,$$

$$P_y(b,y)=0\geq 0,$$

$$P_{xy}(x,y)=\frac{1}{b-a}\big[(b-x)m'(x)-(y-a)m'(y)-m(y)-m(x)\big]\leq 0. \qquad (25)$$

Из (25) имеем следующее неравенство относительно функций m(x), для аргументов x и y удовлетворяющих неравенств $a\leq y\leq x\leq b$

$$(b-x)m'(x)-(y-a)m'(y)\leq m(y)+m(x). \qquad (26)$$

Таким образом доказана следующая теорема.

**Теорема**. Пусть $m(x)\in C^1[a,b]$ и $\forall(x,y)\in G_1=\{(x,y):\ a\leq y\leq x\leq b\}$ выполняется неравенство (26). Тогда решение задачи (1)–(3) единственно в пространстве $C^{1,2}(G)$.

Пример 1. Если $m(x)=C_0$–const, $\forall x\in[a,b]$, то при $C_0>0$ выполняется условия теоремы.

Пример 2. Пусть a=0, b=1 и $m(x)=x+\alpha$. Подставляя эти данные в (26) имеем

$$1-x-y\leq y+x+2\alpha.$$

Отсюда при $0\leq y\leq x\leq 1$ получим

$$\alpha\geq\frac{1}{2}.$$

**Литература:**

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики – М., Наука, 1982, 336 страниц (2-е издание).
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Асанов А., Каденова З. А. Об единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.// Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2010,- Вып.43- С. 46-53.
4. Каденова З. А. О решениях линейных интегральных уравнений первого рода с двумянезависимыми переменными в неограниченных областях.// Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина. -Бишкек, 2013,- Выпуск 13. №1- С. 71-74.

**Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Усенов И.А.**