Аскар кызы Лира

АНАЛИТИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР КАТЫШКАН, ГАММЕРШТЕЙН ТИБИНДЕГИ БИРИНЧИ ТҮРҮНДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КОРРЕКТТҮҮЛҮГҮ

Аскар кызы Лира

КОРРЕКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Askar kyzy Lira

CORRECTNESS OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND OF HAMMERSTEIN TYPE WITH ANALYTICAL FUNCTIONS

УДК: 517.968

Мурда автор аналитикалык функциялар менен, биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин кээ бир класстарынын корректтүүлүгү далилдеген. Бул макалада аналитикалык функциялар менен, корректтүү биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин класстары таабылган. Далилдөө үчүн тескери убакыт менен жылуулук өткөргүч маселесинин чыгарылышы жана катарлар усулу колдонулат.

Негизги сөздөр: *биринчи түрүндөгү интегралдык теңдеме, сызыктуу теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, аналитикалык функция, корректтүүлүк.*

Ранее автор доказала, что линейные интегральные уравнения первого рода могут быть корректными в некоторых классах аналитических функций. В данной статье найдены классы нелинейных интегральных уравнений первого рода с аналитическими функциями, также являющиеся корректными. Для доказательства используются решение задачи теплопроводности с обратным временем и метод рядов.

Ключевые слова: *интегральное уравнение первого рода, линейное уравнение, нелинейное уравнение, аналитическая функция, корректность.*

Earlier, the author proved that linear integral equations of the first kind might be well-posed in some classes of analytical functions. Classes of non-linear integral equations with analytical functions which are well-posed also are obtained in this paper. A solution of the heat equation with inverse time and the method of power series are used to prove.

Key words: *integral equation of the first kind, linear equation, non-linear equation, analytical function, well-problem.*

1. Обозначения

N – множество натуральных чисел; N_0 – множество, состоящее из нуля и натуральных чисел; Z – множество целых чисел; R – множество вещественных чисел; R_+ – множество неотрицательных вещественных чисел; C – множество комплексных чисел.

A_v (для $v>0$) – множество целых аналитических функций $f(z)\in A(C)$ экспоненциального типа с показателем v, то есть удовлетворяющих условию:

$$(\forall f(z)\in A_v)(\exists C\in R_+)(\forall z\in C)(\,|f(z)|<Ce^{v|z|});$$

норма в пространстве A_v $||f||_v:=sup\{|f(z)|\,e^{-v|z|}:z\in C\}$.

A_{+v} (для $v>0$) – множество целых аналитических функций $f(z)\in A(C\ )$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного:

$$(\forall f(z)\in A_{+v})\ (\exists C\in R_+)(\forall n\in N_0)(\,|f^{(n)}(0)|\le Cv^n);$$

норма в пространстве A_{+v} $||\chi||_{+v}:=sup\{|f^{(n)}(0)|\,v^{-n}:n\in N_0\}$.

2. Постановка задачи

На основе анализа работ [1]-[3] с помощью методики [4] Г.М.Кененбаева сделала вывод о наличии в математике «эффекта аналитичности» - задачи из различных разделов математики, которые являются некорректными в классах непрерывных и гладких функций, становятся корректными в некоторых классах аналитических функций. В работах упомянутых авторов это были задачи из различных разделов теории дифференциальных уравнений, в [5] - линейное интегральное уравнение.

Известно, что интегральный оператор Фредгольма вида $\int_\Delta K(x,s,w(s))ds$ с непрерывной функцией $K(x, s, w)$ на ограниченном отрезке Δ является вполне непрерывным, то есть он переводит любую ограниченную последовательность функций в сходящуюся по норме пространства $C(\Delta)$ последовательность функций. Следовательно, задача решения интегрального уравнения первого рода типа Фредгольма с заданной правой частью – непрерывной функцией - не может быть корректно поставлена. Таким образом, корректной может быть только задача решения интегрального уравнения первого рода на неограниченной области Δ.

Рассматривается уравнение для $x\in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2)H(s,w(s))ds = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $H(x, w)$ - аналитические функции, при $x\in R.$, $w\in R$ должно быть $f(x)\in R$ и $H(x, w)\in R$.

Требуется найти условия, при которых уравнение(1) имеет решения в пространстве аналитических функций на R.

3. Используемые результаты

Для уравнения

$$u_t(t,x)=-au_{xx}(t,x) \quad (t\in R_+,\ x\in R) \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (x\in \mathrm{R}), \tag{3}$$

где $a>0$, $\varphi(x)$ – заданная аналитическая функция, вещественная при вещественном x, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Если функция $\varphi(z)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (2)-(3), которое выражается формулой

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-a)^k \varphi^{(2k)}(x)t^k. \tag{4}$$

Это решение устойчиво по $\varphi(z)$ в пространстве $A_{+\nu}$.

Если зафиксировать некоторое $T>0$ и обозначить $v(x)=u(T,x)$, то по известной интегральной формуле для решения уравнения начальной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4aT}\right) w(s)ds.$$

С обозначениями

$$b:=\frac{1}{4aT},\ f(x):=\sqrt{\frac{\pi}{b}}\varphi(x) \text{ будет: } T=\frac{1}{4ab},$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2)w(s)ds.$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2)v(s)ds = f(x). \tag{5}$$

Это решение выражается формулой

$$v(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} f^{(2k)}(x). \tag{6}$$

Оно устойчиво по $f(z)$ в пространстве $A_{+\nu}$.

ТЕОРЕМА 3 [6]. Если

1) выполняются условия Теоремы 2,

2) $(\forall x\in \mathrm{R})(f(x)>0)$,

3) $(\forall x\in \mathrm{R})(|f^{(2k)}(x)| \le 2bk|f^{(2k-2)}(x)|, k\in N)$,

то решение уравнения (5) неотрицательно для всех $x\in\mathrm{R}$.

4. Результаты для уравнений типа Гаммерштейна

ТЕОРЕМА 4. Если выполняются условия Теоремы 2, $(\forall x\in \mathrm{R})(g(x)>0)$ и $g(x)$ – аналитическая функция, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2)g(s)w(s)ds = f(x) \tag{7}$$

имеет аналитическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу Теоремы 2 существует аналитическая функция $v(x)$, удовлетворяющая уравнению (5). Находим $w(x)$ из уравнения $g(x)w(x)=v(x)$.

Например, уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2 + as)w(s)ds = f(x)$$

имеет целое аналитическое решение.

Уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2 + as)\frac{w(s)}{s^{2n}+1}ds = f(x),$$

где $n\in N$, имеет аналитическое решение, но оно не является целым аналитическим, поскольку ядро интегрального уравнения имеет особенности вне вещественной оси.

ТЕОРЕМА 5. Если выполняются условия Теоремы 2 и Теоремы 3, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x-s)^2)w^n(s)ds = f(x), \tag{8}$$

где $n\in N$, $n>1$, имеет аналитическое решение (при n четном - два аналитических решения).

Для доказательства берем в уравнении $v(x)=w^n(x)$, $w(x)=v^{-1/n}(x)$ такую ветвь корня, которая начинается от вещественного значения $v^{-1/n}(0)$.

Литература:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. - Серия 3, выпуск 6. – Бишкек, 2001. - С. 190-200.
2. Pankov P.S., Imanaliev T. M. Convergence of Finite Difference Method for First-Order Partial Differential Equations with Analytical Initial Conditions // Analytical and Approximate Methods: International Conference at the Kyrgyz-Russian Slavic University. - Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2003. - Pp. 185-193.
3. Панков П.С., Сабирова Х.С. Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына: Естественно-технические науки. Серия 3. - Вып. 3. Математические науки. Информатика и информационные технологии. - 2005. - С. 103-106.
4. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений втеории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. - Бишкек: Изд-во "Илим", 2012. - 204 с.
5. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С.321-325.
6. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1(32). – С. 24-29.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Иманалиев Т.М.