Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А., Мамбетов Ж.И.

КӨП ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ, СЫЗЫКТУУ ЭМЕС, ОПЕРАТОРЛУУ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А., Мамбетов Ж.И.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

A.J. Ashirbaeva, E.A. Mamaziaeva, J.I. Mambetov

SOLVING OF NON-LINEAR PARTIAL OPERATOR -DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER WITH MANY VARIABLES BY MEANS OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

УДК: 517.968

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизинде, экинчи тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу Вольтерралык оператор-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелер оператор-интегралдык теңдемелер системаларына келтирилет.

Чыгарылыштардын жашоосун далилдөө функционалдык мейкиндикте байланган өзгөрмөлөрү болгон операторлорду тагыраак жолдо жазуу менен жана кысуучу чагылтуулардын принциби менен, ошондой эле, кошумча белгисиз функцияларды кийирүү аркылуу жүргүзүлөт.

***Негизги сөздөр:** жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, оператор-дифференциалдык теңдеме, экинчи тартиптеги теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Кошинин маселеси, кысуучу чагылтуулардын принциби.*

Начальные задачи для нелинейных вольтерровских операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со многими переменными на основе метода дополнительного аргумента сводятся к системам операторно-интегральных уравнений. Доказательства существования решений проводятся в более строгом способе записи операторов в функциональных пространствах со связанными переменными, с использованием принципа сжимающих отображений, а также введения дополнительных неизвестных функций.

***Ключевые слова**: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, операторно–дифференциальное уравнение, уравнение второго порядка, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений*

Initial value problems for nonlinear partial operator-differential equations with many variables on the base of the method of additional argument are reduced to systems of operator-integral equations. Proving of existence of solutions is performed in more strict way to write operators in functional spaces with bound variables proposed by means of applying the contracting mappings principle and by introducing additional unknown functions.

***Key words:** partial differential equation, non-linear equation, operator-differential equation, equation of second order, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.*

Рассматривается нелинейное операторно-дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right]-$$

$$-\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} + F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)), \quad (1)$$

$$(t,x_1,..,x_n)\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(x_1,x_2,...,x_n), \quad (x_1,..,x_n)\in R^n, \quad k=0,1. \quad (2)$$

Уравнение (1) в случае n = 1рассмотрено в работе [1].

Будем пользоваться следующими обозначениями и следствием из принципа сжимающих отображений Банаха:

Лемма. Если оператор A в банаховом пространстве удовлетворяет условиям 1) $||A(0)||\le c = const$; 2)$||Ax-Ay|| \le\theta\,||x-y||$, $\theta<1$ в шаре $||x||\le\dfrac{c}{1-\theta}$, то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

$C_b(\Omega)$, $C_b^{(k)}(\Omega)$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

$||\cdot||_\Omega$ - норма в пространстве $C(\Omega)$, если область Ω ограничена, и $C_b(\Omega)$, если область Ω не ограничена;

Дифференциальный оператор: $D_n[\omega]=\dfrac{\partial}{\partial t}+\omega\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$;

Операторы, преобразующие функции в функции, будем записывать сначала в полном виде: функция каких переменных получается; (после знака ;): на какую функцию (или несколько функций) и каких переменных действует оператор; связанные переменные в этой функции (по аналогии с записью интегралов), через двоеточие.

Если оператор $F(t;u_1(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)),\quad t\ge 0,$ фактически зависит только от значений $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$ при $0\le s\le t$, то будем называть его «вольтерровского типа»; если существует такое $T^*>0$, что уравнение вида $F(t;u_1(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n))=0$, имеет решение при $0\le t\le T^*$, то будем называть такое решение локальным.

Теорема. Если 1) оператор F – непрерывный по первой переменной;

2) он является вольтерровым и удовлетворяет условию Липшица: существует такое $L>0$, что для любого $T^*\le T$

$$\| F(t;u_1(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)-F(t;u_2(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\|_{[0,T^*]}\le$$
$$\le L\,\|u_1(t,x_1,x_2,...,x_n)-u_2(t,x_1,x_2,...,x_n)\|_{G_{n+1}(T^*)},$$

3) $\varphi_0(x_1,x_2,...,x_n)\in C_b^{(1)}(R^n)$, $\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)\in C_b(R^n)$ и

4) удовлетворяют условию

$$\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)-\varphi_0(x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_0(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}=0. \tag{3}$$

Тогда существует такое $T^*\le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (1), (2) имеет единственное решение, ограниченное во всей области $G_{n+1}(T^*)$.

Доказательство.

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u)=x_i+\int_\tau^t u(s,p_1(s,t,x_1,x_2,...,x_n;u),...,p_n(s,t,x_1,x_2,...,x_n;u))ds,$$
$$i=1,...,n,\quad (\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in Q_{2+n}(T)=\{0\le s\le t\le T,\ x\in R^n\}. \tag{4}$$

Введя обозначение $v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)=u(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u))$

в (4), имеем:

$$p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v(s,t,x_1,x_2,...,x_n):s)=x_i+\int_\tau^t v(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds,\ i=1,2,...,n, \tag{5}$$

$$u(t,x_1,x_2,...,x_n)=v(t,t,x_1,x_2,...,x_n). \tag{6}$$

Лемма 1. Решение задачи (1), (2) $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$ при $t=\tau$ совпадает с решением интегрального уравнения

$$v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)=\varphi_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho,\ (\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in Q_{2+n}(T). \qquad (7)$$

Доказательство леммы 1.

Если имеет место равенство

$$D_n[-v(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)=0, \qquad (8)$$

то из (5) вытекают соотношения

$$D_n[-v(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)=0, \quad i=1,...,n,. \qquad (9)$$

Обозначая через

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n),$$

запишем уравнение (1) в виде

$$D_n[u(t,x_1,x_2,...,x_n)]z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)). \qquad (10)$$

Уравнение (10) с начальными условиями (2) и условием (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=\int_0^t F(s;u(s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n:\xi_1,\xi_2,...,\xi_n))ds\,. \qquad (11)$$

В самом деле, дифференцируя (11), получаем (10).

Полагая $t=0$ в (11), получаем $z(0,x_1,x_2,...,x_n;u)=0.$

Задача (11), (2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$u(t,x_1,x_2,...,x_n)=\varphi_0((p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho. \qquad (12)$$

В самом деле, дифференцируя (12), получаем

$$D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)+$$
$$+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho.$$

В силу (6), (9) доказано выполнение (12). Полагая *t=0* в (12), получаем (2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Существует такое $T^*>0$, что интегральное уравнение (7) имеет единственное решение в $C_b^{(2)}(Q_{2+n}(T^*))$.

Доказательство леммы 2.

Запишем интегральное уравнение (7) в виде

$$v(\tau,t,x_1,...,x_n)=A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w),$$

где оператор

$$A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w) =$$
$$= \varphi_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)) +$$
$$+\int_0^\tau (\tau-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho.$$

Имеем при $\tau \le t \le T^* \le T$:

$$\left|A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;0)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;0))\right| =$$
$$= \left|\varphi_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0)) + \int_0^\tau (\tau-\rho)F(\rho;0)d\rho\right| \le$$
$$\le \left|\varphi_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0))\right| +$$
$$+\left|\int_0^\tau (\tau-\rho)F(\rho;0)d\rho\right| \le \left\|\varphi_0\right\|_{R^n} + \| F(t;0)\|_{[0,T]} \frac{t^2}{2} \le \widetilde{\Omega}_0(T^*),$$

где

$$\widetilde{\Omega}_0(S) \equiv \| \varphi_0 \|_{R^n} + \| F(t;0)\|_{[0,T]} \frac{S^2}{2}.$$

Далее, при $\tau \le t \le T^* \le T$:

$$\left|A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1(s,w,x_1,...,x_n):s,w),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1(s,w,x_1,...,x_n):s,w) -\right.$$
$$\left.- A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2(s,w,x_1,...,x_n):s,w),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2(s,w,x_1,...,x_n):s,w\right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\right\|_{R^n} \int_0^t | v_1(s,t,x_1,...,x_n) - v_2(s,t,x_1,...,x_n)| ds +$$
$$+\int_0^\tau (\tau-\rho)L\| v_1(w,s,x_1,...,x_n) - v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)} d\rho \le$$
$$\le t\left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\right\|_{R^n} + \frac{T}{2}L\right)\| v_1(w,s,x_1,...,x_n) - v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)} \le$$
$$\le T_\bullet\Omega_1 \| v_1(w,s,x_1,...,x_n) - v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)},$$

где $\widetilde{\Omega}_1 = \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\right\|_{R^n} + \frac{T}{2}L.$

Если выбрать $T^* = \frac{1}{2}\widetilde{\Omega}_1$, то из следствия из принципа сжимающих

отображений Банаха получаем, что уравнение (6) имеет решение в пространстве функций с нормой не более $2\widetilde{\Omega}_0(T^*)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Функция $v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n) \in C_b^{(2)}(Q_{2+n}(T^*))$, являющаяся при $0 \le t \le T^* \le T$ решением интегрального уравнения (7), будет удовлетворять (8), а функция $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$, определенная согласно (6), удовлетворяет (12).

Доказательство леммы 3. Пусть $v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in C_b^{(2)}(Q_{2+n}(T^*))$ обращает интегральное уравнение (7) в тождество. Непосредственным дифференцированием из (7) выводится тождество

$$\omega(\tau,t,x_1,...,x_n)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\int_0^t\omega(s,t,x_1,...,x_n)ds,$$

где

$$\omega(\tau,t,x_1,...,x_n)=D_n[-v(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n).$$

Из тождества следует равенство $\omega(\tau,t,x_1,...,x_n)=0$. Отсюда следует (8). Полагая τ=t в (7), из Леммы 2 получаем (12).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Решение уравнения (6) при достаточно малых t имеет непрерывные производные по всем переменным.

Доказательство леммы 4. Если предположить, что $v_t\in C_b$, то функ-циональном пространстве $C_b(Q_{2+n}(T^*))$ имеем

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\right\|_{R^n}(v+\frac{T^2}{2}\|v_t\|)=V_t\ =const<\infty.$$

Справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s);v_1:s,w)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s);v_2:s,w)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le 2T^*\widetilde{\Omega}_1\|v_{1t}-v_{2t}\|.$$

Аналогично получаем для оператора $\dfrac{\partial A}{\partial x_i},\quad i=1,2,...,n$ оценки

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)}{\partial x_i}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|_{R^n}(1+\frac{T^2}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|)=V_{x_i}\ =const<\infty.$$

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s);v_1:s,w)}{\partial x_i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s);v_2:s,w)}{\partial x_i}\right\|\le$$

$$\le 2T^*\widetilde{\Omega}_1\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_i}-\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\right\|,\quad i=1,2,...,n..$$

Дифференцируя (12) по t и по $x,$ получаем

$$\left\|\frac{\partial u(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial t}\right\| \le \|F\|T + V_t, \quad \left\|\frac{\partial u(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}\right\| \le V_{x_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Продолжая этот процесс, можно получить справедливость соотношения

$$v(\tau,t,x_1,\ldots,x_n) \in C_b^{(2)}(Q_{2+n}(T^*)), \quad u(t,x_1,\ldots,x_n) \in C_b^{(2)}(G_{n+1}(T^*)).$$

Лемма 4 и теорема доказаны.

Литература:

1. Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциаль-ного уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15. – №5. – С. 61–64.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.С.