Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И.

КӨП ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ, СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ

Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И.

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

A.J.Ashirbaeva, J.I.Mambetov

METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT FOR SYSTEM OF NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST-ORDER WITH MANY VARIABLES

УДК: 517.968

Кошумча аргумент кийирүү усулун биринчи тартиптеги жекече туундулуу, сызыктуу эмес дифференциалдык теёдемелер системасы \ч\н колдонуу каралган. Каралган теңдемелер системасы үчүн баштапкы маселелер интегралдык теңдемелер системаларына келтирилген. Баштапкы маселенин чечиминин жашоосу менен жалгыздыгынын жетишерлик шарттары алынган. Көп мейкиндиктүү өзгөрмөлөр учуру каралган. Кысуучу чагылтуулардын принциби колдонулган.

***Негизги сөздөр:** жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы, сызыктуу эмес теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Кошинин маселеси, кысуучу чагылтуулардын принциби.*

Рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Начальные задачи для таких систем уравнений сведены к системам интегральных уравнений. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи. Рассмотрен случай многих пространственных переменных. Использован принцип сжимающих отображений.

***Ключевые слова**: Система дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейное уравнение, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.*

Using the method of additional argument for system of non-linear partial differential equations of first-order is considered. Initial value problems for considered system equations are reduced to systems of integral equations. There are obtained sufficient conditions for existence and uniqueness of solutions of initial value problem. The case of many spatial variables is considered. It is used contracting mappings principle.

***Key words:** system of partial differential equations, non-linear equation, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.*

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,\vartheta_k(t,x_1,..,x_n))\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)),\qquad(1)$$

$$i=1,2,..,n,\quad (t,x_1,..,x_n)\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$$

$$u_i(0,x_1,..,x_n)=\varphi_i(x_1,..,x_n),\quad i=1,2,..,n,\quad (x_1,..,x_n)\in R^n,\qquad(2)$$

где функция $\vartheta_i(t,x_1,..,x_n),\, i=1,..,n$ из множества функций $\{u_1(t,x_1,..x_n),u_2(t,x_1,..x_n),..u_n(t,x_1,..x_n)\}$.

Пусть $\vartheta_i(t,x_1,..,x_n)=u_{n+1-i}(t,x_1,..,x_n),\quad i=1,..,n.$

В работе [1] рассмотрен случай уравнения (1), где:

$$a(t,x_1,...,x_n,\vartheta_i(t,x_1,..,x_n))=u_i(t,x_1,..,x_n),\quad i=1,..,n.$$

Уравнение (1) в случае n=1 рассмотрено в работе [2].

Используем обозначения классы функций, приведённые в работах [1-2]:

$\overline{C}^{\alpha_1,...,\alpha_l}$ – класс функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_j по j-му аргументу, *j=1,…l,* на некотором подмножестве Ω евклидова пространства R^l, мульти индекс (0,…,0) будем опускать.

$Lip(N\big|_u, M\big|_v, ...)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом *N,* по переменной *v* с коэффициентом *M,…*; для функции одной переменной индекс будем опускать.

Теорема.

Пусть для i=1,2,.., n функции $\varphi_i(x_1,...,x_n) \in \overline{C}^1(R^n)$, $a_i(t,x_1,...,x_n,\vartheta_i) \in \overline{C}^{0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},1}(G_{n+1}(T)\times R)$, $f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n) \in \overline{C}^{0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T)\times R^n)$.

Тогда существует такое $0 \le T^* \le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (1), (2) имеет единственное ограниченное решение в $G_{n+1}(T^*)$.

Доказательство теоремы представим в виде лемм.

Лемма 1. В классе $\overline{C}^{\underbrace{1 1,...,1,}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T^*))$ задача (1), (2) с $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ - определяемые из

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial s} = a(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n),u_{n+1-i}(s,p_1,..,p_n)),\\
&p_i(t,t,x_1,...,x_n) = x_i, \qquad i=1,2,...,n,\\
&(s,t,x_1,...,x_n) \in Q_{n+2}(T) = \{0 \le s \le t \le T,\, x \in R^n\};
\end{aligned}
\tag{3}
$$

эквивалентна системе интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&u_i(t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n)) +\\
&+\int_0^t f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
p_i(s,t,x_1,...,x_n) = x_i - \int_s^t a_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_{n+1-i}(\nu,p_1,...,p_n))d\nu, \tag{5}
$$

$i = 1,2,...,n.$

Доказательство леммы 1. Из (3) следует (5) и следующие равенства

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial s} = \frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t} +\\
&+\sum_{k=1}^n a_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n),u_{n+1-k}(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))\times\\
&\times\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial x_k}, \quad i=1,2,..,n.
\end{aligned}
$$

На основании последнего соотношения из (1) имеем

$$
\begin{aligned}
&u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n) = \varphi_i(x_1 - \int_0^t a_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n,u_{n+1}(\nu,p_1,..,p_n))d\nu,...,x_n -\\
&-\int_0^t a_n(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu +\\
&+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,..,p_n),...u_n(\nu,p_1,..,p_n)d\nu, i=1,...,n,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

которое при $s = t$ совпадает с (4).

С другой стороны, из (4) для $p_i(s,t,x_1,...,x_n), \quad i=1,2,..,n$ следует

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_i(t,x_1,...,x_n,u_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n))\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k}=0, \tag{7}$$
$$p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i, \qquad i=1,2,..,n.$$

Определяя из (4) частные производные по t и по x_k, k=1,…,n, с учетом (7) получаем (1).

Введя обозначения

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n)), i=1,2,..,n. \tag{8}$$

из (5) и (6) получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$
$$+\int_0^s f_i(\rho,p_1(\rho,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\rho,t,x_1,...,x_n),\omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho, \tag{9}$$

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n)=x_i-\int_s^t a_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n,\omega_{n+1-i}(\nu,p_1,...,p_n))d\nu, \tag{10}$$
$$i=1,2,..,$$

Лемма 2.

Пусть для i=1,...,n функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))$, *где* $u_i(t,x_1,...,x_n)$ *являются решениями задачи (1), (2), а* $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ *-решениями задачи (3), удовлетворяют систему интегральных уравнений (9),(10) и наоборот , если функции* $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ *являющиеся решениями системы интегральных уравнений (9),(10) непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то в пределах некоторого интервала изменения переменной t, определяемого на основе исходных данных,* $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)$ *при s=t ,будет удовлетворять системе уравнений (1) и начальному условию (2).*

Доказательство леммы 2. *Пусть функции* $u_i(t,x_1,...,x_n)$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$, $i=1,2,...,n$ *являются решениями задач (1), (2) и (3). В силу леммы 1 они удовлетворяют равенствам (5) и (6). Используя обозначения (7) приходим к системе интегральных уравнений (9),(10).*

Напротив, пусть непрерывно дифференцируемые функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$, $i=1,2,...,n$ *обращают систему интегральных уравнений (9),(10) в тождество.*

Обозначим

$$W_i(s,t,x_1,...,x_n)=\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_i(t,x_1,...,x_n\omega_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n))\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k},$$
$$i=1,2,..,n.$$

Непосредственным дифференцированием из (9), имеем W=0.

Кроме этого, из (9) вытекает, что $\dfrac{\partial\omega_i}{\partial s}=f_i$. *С учетом отмеченных фактов, подставляя* $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n)=u_i(t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,..,n$ *в (1) и (2), убеждаемся, что на всем интервале изменения t, на котором W=0,* $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,..,n$ *удовлетворяют начальной задаче (1), (2).*

Лемма 3. *Существует такое* $T^*>0$, *что система интегральных уравнений (9),(10) имеет единственное решение, принадлежащее* $\overline{C}^{\,1,1,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(Q_{n+2}(T))$.

Доказательство леммы 3. Запишем систему интегральных уравнений (9), (10) в виде одного векторного равенства

$$\theta=A\theta, \tag{11}$$

в котором $\theta=(\theta_0^1,\theta_0^2,...,\theta_0^n,\theta_1^1,\theta_1^2,...,\theta_1^n)$ - вектор-функция переменных $(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, компоненты которой есть искомые функции $\theta_0^i=p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_1^i=\omega_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n),\quad i=1,2,...,n,$, а компоненты оператора $A=(A_0^1,A_0^2,...,A_0^n,A_1^1,A_1^2,...,A_1^n)$ определяются равенствами:

$$A_1^i\theta=\varphi_i(\theta_0^1(0,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(0,t,x_1,...,x_n))+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\rho,t,x_1,...,x_n),\theta_1^1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\theta_1^n(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho, \tag{12}$$

$$A_0^i\theta=x_i-\int_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\nu,t,x_1,...,x_n),\theta_1^{n+1-i}(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,\ i=1,2,...,n.$$

Покажем, что уравнение (10) имеет в области $Q_{n+2}(T)$ при $T<T^*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\left\|\theta-\widetilde{\theta}\right\|\le M$, где

$$\|\theta\|=\max_{0\le i\le n}\ \max_{(t,x)\in Q_{n+2}(T)}\left\{|\theta_i|,\quad i=1,2,...,n\right\}.$$

Имеем при $t\le T^*\le T$:

$$\left\|A_1^i\theta-\varphi_i\right\|\le\|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T,\qquad\qquad \left\|A_0^i\theta-x_i\right\|\le\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T.$$

Оператор *A* сжимает расстояние между элементами шара $S(\widetilde{\theta},M)$.

Справедливы следующие оценки:

$$\left|A_0^i\theta^1-A_0^i\theta^2\right|\le(\sum_{k=1}^n L_k^i+K^i)T\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,\quad \left|A_i\theta^1-A_i\theta^2\right|\le\Omega_i(T)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,$$

где $\Omega_i(T)=\sum_{k=1}^n\left\|\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right\|+\sum_{k=0}^n\ (M_k^i+N_k^i)T,$

$$f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in Lip(M_1^i\big|_{x_1},M_2^i\big|_{x_2},...,M_n^i\big|_{x_n},N_1^i\big|_{u_1},N_2^i\big|_{u_2},...,N_n^i\big|_{u_n}),$$

$$a(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1)\in Lip(L_1^i\big|_{x_1},L_2^i\big|_{x_2},...,L_n^i\big|_{x_n},K^i\big|_{u_1}),$$

$$M_j^i>0-const,\ N_j^i>0-const,\ L_j^i>0-const,\ j=0,1,2,...,n.$$

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{1/\|a_i\|; 1/\|f_i\|; M/(\sum_{k=1}^{n} L_k^i + K^i); T_*^i\}$, ,

где $T_i^\bullet$ − корень уравнения $\Omega_i(T) = M$, $i = 1,2,...,n$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\tilde{\theta}, M)$ на себя.

Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (11) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

Литература:

1. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциаль-ных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Има-налиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
2. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И.Мамбетов // Естественные и математические науки в современном мире. 2017.-№1(48). -С.61-67.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.С.