

Байгесеков А.М.

БИР КЛАССТАГЫ ЭКИ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРР-СТИЛТЬЕСТИН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН КВАДРАТТЫК СУММАЛАНУУСУ

Байгесеков А.М.

КВАДРАТИЧНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ВТОРОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

A.M.Baigesekov

SQUARE SUMMABILITY OF SOLUTIONS ONE CLASS OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA-STIELTJES OF THE SECOND KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

УДК: 517.968

Бул жумушта өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгүнүн негизинде жана теңдемелерди өзгөртүү методу менен эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын чексиз тилкеде квадраттык суммалануусунун жетиштүү шарттары алынды.

Негизги сөздөр: өсүүчү функция боюнча туунду, эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемеси, чыгарылыштын квадраттык суммалануусу.

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразования уравнений установлены достаточные условия типа знака функций квадратичной суммируемости на бесконечной полосе решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными в случае, когда свободный член рассматриваемого уравнения обладает этим свойством.

Ключевые слова: производная по возрастающей функции, линейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными, квадратичная суммируемость решения.

In this paper, on the basis of the notion of a derivative with an increasing function and the method of transformation of equations, sufficient conditions are established for the type of the sign of the quadratic summation functions on an infinite strip of the solution of the linear Volterra -Stieltjes equation. The Volterra -Stieltjes integral equation of the second kind with two independent variables in the case when it takes place in the free term Of the equation under consideration.

Key words: derivative is an increasing function, linear integral equations of Volterra-Stieltjes with two independent variables, square summability of solution.

Рассмотрим линейное интегральное уравнения Вольтерра-Стилтьеса с двумя независимыми переменными

$$u(t, x) + \int_0^t a(t, x, s) u(s, x) d\varphi(s) + \int_0^x b(t, x, y) u(t, y) d\psi(y) = f(t, x), \quad (1)$$

где $(t, x) \in G = \{(t, x) : 0 \leq t \leq \infty, 0 \leq x \leq \infty\}$, $a(t, x, s), b(t, x, y)$ - известные функции, $u(t, x)$ - неизвестная функция. $\varphi(t), \psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$. Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными рассматривались в [3], [4], [7].

В данной работе, используя метод, примененный в работе [5], доказана квадратично суммируемость решения уравнения (1) в области G . В работе [8] дано понятие производной по возрастающей функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. Производной по $\varphi(x)$ функции $f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta \varphi(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{\varphi(x)}(x) = \frac{df(x)}{d\varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}.$$

Предположим выполнение следующих условий:

А) Функции $a(t, x, s)$, $a'_{\varphi(t)}(t, x, s)$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t, x, s)$ – непрерывны в области G_1 , где $G_1 = \{(t, x, s) : 0 \leq s \leq t \leq \infty, 0 \leq x \leq \infty\}$, $a(t, x, 0) \geq 0$ и $a'_{\varphi(t)}(t, x, 0) \leq 0$ при $(t, x) \in G$, $a'_{\varphi(s)}(t, x, s) \geq 0$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t, x, s) \leq 0$ при $(t, x, s) \in G_1$.

В) Функции $b(t, x, y)$, $b'_{\psi(y)}(t, x, y)$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t, x, y)$ - непрерывны в области $G_2 = \{(t, x, y) : 0 \leq t \leq \infty, 0 \leq y \leq x \leq \infty\}$, $b(t, x, 0) \geq 0$ и $b'_{\psi(x)}(t, x, 0) \leq 0$ при $(t, x) \in G$, $b'_{\psi(y)}(t, x, y) \geq 0$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t, x, y) \leq 0$ при $(t, x, y) \in G_2$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия 1) А), В); 2) $f(t, x) \in L_2(G)$. Тогда решение уравнения (1) принадлежит в пространству $L_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t, x)$ - решение уравнения (1). Тогда уравнение (1) умножаем на $u(t, x)$ и интегрируем по области $G_{tx} = \{(s, y) : 0 \leq s \leq t, 0 \leq y \leq x\}$, $(t, x) \in G$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x u^2(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) + \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) u(\tau, y) u(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) + \\ & + \int_0^t \int_0^x \int_0^y b(s, y, z) u(s, z) u(s, y) d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s) = \int_0^t \int_0^x f(s, y) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s). \end{aligned} \quad (2)$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части (2) по формуле интегрирования по частям и применением формулу Дирихле:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) u(\tau, y) u(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) = \\ & = - \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) \frac{\partial}{\partial \varphi(\tau)} \left(\int_\tau^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) d\varphi(\tau) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) = \\ & = \int_0^t \int_0^x a(s, y, 0) \left(\int_0^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) u(s, y) d\psi(y) d\varphi(s) + \\ & + \int_0^t \int_0^x \int_0^s a'_{\varphi(\tau)}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right) u(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^x a(t, y, 0) \left(\int_0^t u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(s)}(s, y, 0) \left(\int_0^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t, y, \tau) \left(\int_\tau^t u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_\tau^t a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\varphi(s) d\psi(y) d\varphi(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда применив формулу Дирихле, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^x \int_0^s a(s, y, \tau) u(\tau, y) u(s, y) d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^x a(t, y, 0) \left(\int_0^t u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(s)}(s, y, 0) \left(\int_0^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t, y, \tau) \left(\int_\tau^t u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(\tau) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_\tau^t a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u(\xi, y) d\varphi(\xi) \right)^2 d\varphi(\tau) d\psi(y) d\varphi(s). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичным образом для второго слагаемого из (2) получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^x \int_0^y b(s, y, z) u(s, z) u(s, y) d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s) &= \frac{1}{2} \int_0^t b(s, x, 0) \left(\int_0^x u(s, \nu) d\varphi(\nu) \right)^2 d\varphi(s) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s b'_{\psi(y)}(s, y, 0) \left(\int_0^y u(s, \nu) d\varphi(\nu) \right)^2 d\psi(y) d\varphi(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x b'_{\psi(z)}(s, x, z) \left(\int_z^x u(s, \nu) d\varphi(\nu) \right)^2 d\psi(z) d\varphi(s) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \int_0^y b''_{\psi(z)\psi(y)}(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, \nu) d\varphi(\nu) \right)^2 d\psi(z) d\psi(y) d\varphi(s). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя преобразования 3), 4) в 2), учитывая условие 1) теоремы имеем

$$\int_0^t \int_0^x |u(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) \leq \int_0^t \int_0^x |f(s, y)| |u(s, y)| d\psi(y) d\varphi(s).$$

Отсюда применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^x |u(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) &\leq \left(\int_0^t \int_0^x |f(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^x |u(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\int_0^t \int_0^x |u(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^t \int_0^x |f(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где норма $L_2(G)$: $\|u\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty |u(s, y)|^2 d\psi(y) d\varphi(s) \right)^{\frac{1}{2}}$.

Из (5) в силу условия 2) теоремы вытекает $u(t, x) \in L_2(G)$. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение

$$u(t, x) + \int_0^t e^{-t+x+s} u(s, x) d\varphi(s) + \int_0^x e^{t^2-x^2+y^2} u(t, y) d\psi(y) = f(t, x),$$

$$\text{где } (t, x) \in G = [0; \infty) \times [0; \infty), \quad \varphi(t) = \sqrt{t}, \psi(x) = \sqrt{x}.$$

Нетрудно убедиться, что выполняются все условия А), В).

$$\text{Здесь } a(t, x, s) = e^{-t+x+s}, \quad b(t, x, y) = e^{t^2-x^2+y^2}.$$

$$\text{Тогда 1) } a(t, x, 0) = e^{-t+x} \geq 0, \quad a'_{\varphi(t)}(t, x, 0) = -2\sqrt{t} e^{-t+x} \leq 0,$$

$$a'_{\varphi(s)}(t, x, s) = 2\sqrt{s} e^{-t+x+s} \geq 0, \quad a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t, x, s) = -4\sqrt{ts} e^{-t+x+s} \leq 0.$$

$$2) \quad b(t, x, 0) = e^{t^2-x^2} \geq 0, \quad b'_{\psi(x)}(t, x, 0) = -4x\sqrt{x} e^{t^2-x^2} \leq 0,$$

$$b'_{\psi(y)}(t, x, y) = 4y\sqrt{y} e^{t^2-x^2+y^2} \geq 0, \quad b''_{\psi(x)\psi(y)}(t, x, y) = -16xy\sqrt{xy} e^{t^2-x^2+y^2} \leq 0;$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы. Поэтому решение этого уравнения принадлежит пространству $u(t, x) \in L_2([0; \infty) \times [0; \infty))$.

Литература:

1. Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Функциональный анализ и его приложения. – 1983. – Т.17, Вып. 4. – С.73–74.
2. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. – 1989. – Т.309, №5. – С.1052–1055.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. – 1991. – Т.317, №1. – С.32–35.
4. Асанов А. Регуляризация и достаточные условия единственности решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1979. – С.154–165.
5. Асанов А. Единственность решения операторных уравнений Вольтерра // Изв. АН Кирг. ССР. – 1988. – №11. – С.58–61.
6. Бухгейм А.Л. Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.242, №2. – С.272–276.
7. Асанов А. Регуляризация и единственность решения линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Ф.: Илим, 1980. – Вып.13. – С.207–2015.
8. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер. – Б.: КТУ «Манас», 2001. – №1. – С.18–78.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.