Байзаков А.Б., Бектурова А.Т.

ВОЛЬТЕРРАНЫН III ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ЖАНА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Байзаков А.Б., Бектурова А.Т.

О РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА III РОДА

A.B.Baizakov, A.T.Bekturova

ON THE SOLUTIONS OF INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL VOLTERRA EQUATIONS OF THE THIRD KIND

УДК: 517.968.22

Каралган жумушта Вольтерранын III турдөгу интегралдык жана интегро-дифференциалдык тендемелери өздүк маанилерге жана өздүк функцияларга ээ болоору көргөзүлгөн. Жоголуучу чыгарылыштарынын жашашына жетишээрлик шарттар табылды. Вольтерранын III түрдөгү интегро-дифференциалдык тендемелеринин жаны классы үчүн жоголуучу чыгарылыштар тургузулган. Мында Я.В.Быков маанисиндеги оператордук чыгарылыш колдонулган. Иллюстративдик мисалдар түзүлгөн.

Негизги создор: *интегралдык жана интегро-дифференциалдык тендемелер, жоголуучу чыгарылыштар, кысып чагылуучу принцип, Я.В.Быков маанисиндеги оператордук чыгарылыш.*

В данной работе показано, что интегральные и интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра III рода имеют собственные значения и собственные функции. Для нового класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра III рода построены исчезающие решения. При этом использовано понятия операторное решение в смысле Я.В.Быкова. Построены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: *интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, исчезающие решения, принцип сжатых отображений, операторное решение в смысле Я.В.Быкова.*

In this paper it is shown that integral and integro-differential Volterra equations of the third kind have eigenvalues and eigenfunctions. For a new class of integro-differential Volterra equations of the third kind, vanishing solutions are constructed. In this case, the concept of an operator solution in the sense of V.V. Bykov is used. Illustrative examples are constructed.

Key words: *integral and integro-differential equations, vanishing solutions, the principle of condensed mappings, an operator solution in the sense of V.V. Bykov.*

Введение

Известно, что однородное интегральное уравнение Вольтерра II рода с непрерывным ядром не имеет собственных чисел и собственных функций, т.е. уравнение

$$u(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)u(s)ds \ , \tag{1}$$

где $K(t,s)\in C(a\le s\le t\le b),\ \lambda\in R$ не имеет непрерывных решений, отличное от тривиального $u(t)\equiv 0$.

В отличие от них, интегральное уравнение Вольтерра III рода могут иметь нетривиальные (как непрерывные, так и разрывные) решения.

Пример 1. Рассмотрим простое интегральное уравнение Вольтерра III рода

$$tu(t)=\lambda\int_0^t u(s)ds\,. \tag{2}$$

Любое значение параметра $\lambda\in(0,+\infty)$ является собственным (характеристическим) значением, а соответствующий ему собственной функцией является $u_\lambda(t)=t^\lambda$.

Отметим, что данный оператор (2) имеет сплошной спектр.

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра III рода

$$t^2u(t)=\lambda\int_0^t (2t-6s)u(s)ds\,. \tag{3}$$

Оказывается, при $\lambda=-1$ функции $u_1(t)=6t$ и $u_2(t)=2$ являются решениями (3), т.е. собственное значение $\lambda=-1$ имеет двумерную геометрическую кратность.

Пример 3. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра III рода

$$tu'(t) = 4u(t) - \lambda\int_0^t \frac{u(s)}{s}ds\,.$$

Для $\lambda = 4$ последнее уравнение имеет одну собственную функцию $u_1(t) = t^2$.

Пример 4. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра III рода

$$tu'(t) = 5u(t) - \lambda\int_0^t \frac{u(s)}{s}ds\,. \qquad (4)$$

Для $\lambda = 6$ уравнение (4) имеет две собственные функции $u_1(t) = t^2$, $u_2(t) = t^3$.

Рассмотрим нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра вида

$$tu'(t) = 5u(t) - 6\int_0^t \frac{u(s)}{s}ds + f\left(t, u(t)\right), \qquad (5)$$

и найдем достаточные условия существования исчезающего решения $u(t) \to 0$, при $t \to 0$.

Будем искать решение (5) в виде

$$u(\mathrm{t}) = \mathrm{c}_1 t^2 + c_2 t^3 + v(\mathrm{t}) \qquad (6)$$

где c_1, c_2 произвольные постоянные n мерные векторы, v(t) новая неизвестная функция, определенная на сегменте [0,1].

Подставляя (6) в систему (5)

$$\left[\mathrm{t\,v'(t)} - 5\,\mathrm{v} + 6\int_0^t \frac{v(s)}{s}d\,s\right]E_n = f\left(t, \mathrm{c}_1 t^2 + c_2 t^3 + v(\mathrm{t})\right). \qquad (7)$$

Напомним некоторые понятия из курса интегро-дифференциальных уравнений. Наряду с уравнением

$$\frac{du}{dt} = A(\mathrm{t})u(t) + \int_0^t K(\mathrm{t},\tau)u(\tau)d\tau + f\left(t\right),$$

рассматривается параметрическое уравнение

$$\frac{dz}{dt} = A(\mathrm{t})z(t) + \int_s^t K(\mathrm{t},\tau)z(\tau)d\tau, t \ge s, \qquad (8)$$

где s параметр, впервые введенный в рассмотрение Я.В.Быковым [1,с.140].

Матрица W(t,s), удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial W(\mathrm{t,s})}{\partial t} = A(\mathrm{t})W(\mathrm{t,s}) + \int_s^t K(\mathrm{t},\tau)W(\tau,\mathrm{s})d\tau, t \ge s, W(\mathrm{s,s}) = \mathrm{E},$$

где E единичная матрица, называется операторным решением по Быкову интегро-дифференциального уравнения (8)[2,с.45].

Вернемся к системе (7). Предположим, что функция

$$W(\mathrm{t,s}),\ W(s,\mathrm{s}) = \mathrm{E}_n$$

является решением системы линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\left[\mathrm{t}\frac{\partial W(\mathrm{t,s})}{\partial t} - 5W(\mathrm{t,s})\,\mathrm{v} + 6\int_s^t \frac{W(\tau,\mathrm{s})}{\tau}d\,\tau\right]E_n = 0$$

В частности, таким «операторным решением» является матрица вида

$$W(\mathrm{t,s}) = \left[\left(\frac{t}{s}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{s}\right)^3 \right] E_n .$$

Теперь, используя понятие «операторное решение в смысле Я.В.Быкова», переходим от системы (7) к системе нелинейных интегральных уравнений

$$v(\mathrm{t}) = \int_0^t W(t,s)\frac{1}{s}\left[f\left(s, \mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3 + v(s)\right) \right] ds \equiv P\left[v(\mathrm{t}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\right] \tag{9}$$

Пусть C[0,1] –пространство непрерывных функций

$$\left\{v_1(\mathrm{t}), v_2(\mathrm{t}), ..., v_n(\mathrm{t})\right\}.$$

Норму в этом пространстве определим в виде

$$\left\|v(\mathrm{t})\right\| = \sum_{i=1}^{n} \max_{0\le t\le 1}\left|v_i(\mathrm{t})\right|.$$

Определим расстояние между элементами этого пространства в виде

$$\rho(\mathrm{u,v}) = \sum_{i=1}^{n} \max_{0\le t\le 1}\left|u_i(\mathrm{t}) - v_i(\mathrm{t})\right|.$$

Пространство C[0,1] –вектор функций $\{v(\mathrm{t})\}$ полное метрическое пространство.

Правую часть системы интегрального уравнения (9) рассмотрим как некоторый оператор $P\left[v(\mathrm{t}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\right]$, действующий на вектор функцию $v(t, c_1, c_2)$, зависящих от двух произвольных постоянных векторов c_1, c_2.

Предположение (A).

Предположим, что $f(t,u) \in C\left(\left[0,1\right] \times \left\|u\right\| \le h\right) \cap Lip\left(N(\mathrm{t})\big|_u\right)$

N(t)-неотрицательная, неубывающая функция.

Пусть $\Omega = \left\{\mathrm{v}(t) : \mathrm{v}(t) \in C\left[0,\delta\right] \cup \left\|\mathrm{v}\right\| \le h\right\}$, причем величина δ, h будет, определяется ниже.

Из (9) получаем неравенство вида

$$\left\|P[v]\right\| \le \int_0^t \left\|W(t,s)\right\| \frac{1}{s} \left\| f\left(s, \mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3 + v(s)\right)\right\| ds \le \int_0^t \left\|W(t,s)\right\| \frac{1}{s} N(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}[\left\|\mathrm{c}_1\right\| t^2 + \left\|\mathrm{c}_2\right\| t^3 + h].$$

В силу предположения (A) выберем δ, h так чтобы

$$\int_0^\delta \left\|W(\delta,s)\right\| \frac{1}{s} N(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}[\left\|\mathrm{c}_1\right\| \delta^2 + \left\|\mathrm{c}_2\right\| \delta^3 + h] \le \mathrm{h}.$$

Тогда оператор Pv определенный правой частью (9) переводит множество Ω в себя: $P\Omega \to \Omega.$.

Покажем теперь, что оператор $P[v(\mathrm{t}, c_1, c_2)]$ является оператором сжатия.

В самом деле, из (5) имеем

$$P\left[u(\mathrm{t}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\right] - P\left[v(\mathrm{t}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\right] = \int_0^t W(t,s)\frac{1}{s}\left[f\left(s, \mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3 + v(s)\right) - f\left(s, \mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3\right) \right] ds.$$

Отсюда

$$\begin{gathered} \left\|P\left[u(\mathrm{t}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\right] - P\left[v(\mathrm{t}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\right]\right\| \le \int_0^t \left\|W(t,s)\right\| \frac{1}{s} \times \\ \times \left\| f\left(s, \mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3 + u(s)\right) - f\left(s, \mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3 + v(s)\right)\right\| ds \le \int_0^t \left\|W(t,s)\right\| \frac{1}{s} N(\mathrm{s}) ds \left\|u - v\right\|. \end{gathered} \tag{10}$$

Потребуем так, чтобы для δ выполнялись еще условие

$$\int_0^t \|W(t,s)\|\frac{1}{s}N(\mathrm{s})ds \le \int_0^\delta \|W(\delta,s)\|\frac{1}{s}N(\mathrm{s})ds = q < 1.$$

Тогда из (10) имеем $\left\|P\left[u(\mathrm{t},\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2)\right] - P\left[v(\mathrm{t},\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2)\right]\right\| \le q\rho(\mathrm{u},\mathrm{v})$.

Следовательно, оператор P[v(t,c_1,c_2)] является оператором сжатия. Поэтому на основании принципа сжатых отображений система нелинейных интегральных уравнений (9) имеет единственное непрерывное вместе со своей первой производной решение v(t,c_1,c_2), которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Пусть

$$\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2) \equiv P[\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2)].$$

Тогда из тождества (7) вытекает неравенство

$$\|v(\mathrm{t})\| \le \int_0^t \|W(t,s)\|\frac{1}{s}\times$$

$$\times\left\|f\left(s,\mathrm{c}_1 s^2 + c_2 s^3 + v(s)\right)\right\|ds \le \int_0^t \|W(t,s)\|\frac{1}{s}N(\mathrm{s})ds[\|\mathrm{c}_1\|t^2 + \|\mathrm{c}_2\|t^3 + \|v(\mathrm{t})\|].$$

Отсюда получаем

$$\|v(\mathrm{t})\| \le \frac{q(\|\mathrm{c}_1\|t^2 + \|\mathrm{c}_2\|t^3)}{1-q}.$$

Последнее неравенство показывает, что

$$\mathrm{v}(t) \to 0, \text{ при } t \to 0.$$

Итак доказана

Теорема. Пусть выполнено условие (A). Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (5) имеет единственное исчезающее решение $u(t) \in C(0,\delta)$, $0 < \delta < 1$, которое имеет представление в виде (6).

Литература:

1. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Ф.: Глав. изд. Министерства культуры Кирг. ССР, 1957. – 328 с.
2. Боташев А.И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. М.: Изд. МФТИ, 1998. – 78 с.
3. Байзаков А.Б. Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра с особой точкой // Изв. АН БССР, Сер. физ. - мат. наук. – 1984. - №1. – С. 111-112.
4. Бектеналиев А. Исследование особенностей решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в окрестности неподвижной особой точки: Автореф. дисс…. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ф., 1990. – 17 с.
5. Бараталиев К.Б. Методы решения некорректных задач математической физики: Автореф. дисс…. д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02.- Б., 2015. – 25 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.