DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 4, 2021

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Абдирайимова Н.А.

КОШУМЧА ЯДРОЛОР МЕТОДУ ЖАНА БЕШИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ СЫМАЛ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ТОЛУК ЭМЕС ЯДРОЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ТУРУМДУУЛУГУ

Абдирайимова Н.А.

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЯДЕР И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ

N.A. Abdiraiimova

AUXILIARY KERNELS METHOD AND STABILITY OF SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIFTH ORDER WITH INCOMPLETE KERNELS

УДК: 517.968.74

Бешинчи тартиптеги сызыктуу сымал Вольтерра тибиндеги толук эмес ядролуу интегро-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жана алардын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү туундуларынын жарым окто чектелгендигинин, б.а. чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары табылат. Адегенде кошумча ядролор методунун жардамы менен, тактап айтканда белгисиз функциянын төртүнчү туундусунун коэффициенти болгон жаңы ядрону тараза эрежеси боюнча кийирүү жана бөлүктөп интегралдоо аркылуу, берилген теңдеме жүктөлгөн теңдемеге келтирилет. Андан кийин келип чыккан жүктөлгөн теңдеме С.Искандаровдун теңдемелерди системага стандарттык эмес келтирүү методун колдонуу менен, эки оң параметр жана эки оң салмактык функцияларды кийирүү аркылуу, эки экинчи тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемеден жана биринчи тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги жүктөлгөн интегро-дифференциалдык теңдемеден турган эквиваленттүү системага келтирилет. Ал эми бул системага В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, С.Искандаровдун кесүүчү функциялар методу жана Ю.А. Ведь, З.Пахыровдун интегралдык барабарсыздыктар методу өнүктүрүлөт. Табылган жетиштүү шарттарды тастыктай турган иллюстративдик мисал тургузулат.

***Негизги сөздөр**: интегро-дифференциалдык теңдеме, бешинчи тартип, толук эмес ядролор, сызыктуу сымалдык, чектелгендик, турумдуулук, кошумча ядролор методу.*

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых, вторых, третьих, четвертых производных, т.е. устойчивости решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения пятого порядка типа Вольтерра с неполными ядрами. Сперва заданное уравнение пятого порядка с помощью метода вспомогательных ядер, а именно введением некоторого нового ядра как коэффициент четвертой производной неизвестной функции по правилу веса и интегрированием по частям, приводится к нагруженному уравнению пятого порядка. После этого применением нестандартного метода сведения уравнений к системе С. Искандарова, введением некоторых двух положительных параметров и некоторых двух положительных весовых функций, это нагруженное уравнение сводится к эквивалентной системе, состоящей из двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с положительными постоянными коэффициентами и линейного нагруженного интегро-дифференциального уравнения первого порядка типа Вольтерра. К этой системе развиваются метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций С. Искандарова и метод интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З.Пахырова. Строится иллюстративный пример, показывающий естественность найденных достаточных условий.

***Ключевые слова**: интегро-дифференциальное уравнение, пятый порядок, неполные ядра, слабая нелинейность, ограниченность, устойчивость, метод вспомогательных ядер.*

Sufficient conditions are established for the boundedness on the semi-axis of all solutions and their first, second, third, fourth derivatives, i.e. for the stability of solutions to a weakly non-linear integro-differential equation of the fifth order of Volterra type with incomplete kernels. First, a given fifth-order equation using the method of auxiliary kernels, namely by introducing a new kernel as a coefficient of the fourth derivative of an unknown function according to the weight rule and integrating by parts, is reduced to a loaded fifth-order equation. After that, by applying a non-standard method of reducing the equations to the system of S. Iskandarov, by introducing some two positive parameters and some two positive weight functions, this loaded equation is reduced to an equivalent system consisting of two linear inhomogeneous second-order differential equations with positive constant coefficients and a linear loaded first-order integro-differential equation of the Volterra type. The method of transformation of V.Volterra's equations, the method of cutting functions of S.Iskandarov, and the method of integral inequalities

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

of Yu. A. Ved, Z. Pakhyrov are developed for this system. An illustrative example is constructed, showing the naturalness of the found sufficient conditions.

Key words: *integro-differential equation, fifth-order, incomplete kernels, weak nonlinearity, boundedness, stability, auxiliary kernel method.*

Все фигурирующие функции являются непрерывными при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$, $|x|,|u|,|\vartheta| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $I = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; под устойчивостью решений слабо нелинейного ИДУ пятого порядка понимается ограниченность на полуинтервале I всех его решений и их производных до четвертого порядка включительно.

Задача. Установить достаточные условия устойчивости решений ИДУ пятого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(5)}(t) + \sum_{k=0}^{4} a_k(t) x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=0}^{3} Q_j(t,\tau) x^{(j)}(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) + F(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} h(t,\tau, x(\tau), x'(\tau)) d\tau), \quad t \ge t_0 \qquad (1)$$

с немалыми ядрами $Q_j(t,\tau) \quad (j = 0,1,2,3)$, т.е. при условии:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} |Q_j(t,\tau)| d\tau dt = \infty \qquad (j = 0,1,2,3)$$

и при слабой нелинейности:

$$|F(t,x,u,\vartheta)| \le F_0(t) + g_0(t)|x| + g_1(t)|u| + g_2(t)|\vartheta|,$$

$$|h(t,\tau,x,u)| \le g_3(t,\tau)|x| + g_4(t,\tau)|u| \qquad (CH)$$

с неотрицательными $F_0(t),\ g_0(t),\ g_1(t), g_2(t),\ g_3(t,\tau), g_4(t,\tau)$.

В ИДУ (1) отсутствует ядро с $x^{(4)}(\tau)$. Следуя [1, 2], такое уравнение будем называть ИДУ с неполными ядрами.

Под решением ИДУ (1) понимается решение $x(t) \in C^5(I, R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0) \quad (k = 0,1,2,3,4)$. В силу условия *(CH)* такие решения ИДУ (1) существуют.

Выше поставленная нами задача ранее никем не изучена. Для решения этой задачи будем развивать метод вспомогательных ядер [1, 2] в сочетании с нестандартным методом сведения к системе [3], методом преобразования уравнений В. Вольтерра [4, с. 194-217], методом срезывающих функций [5, с. 41; 3] и методом интегральных неравенств [6].

Приступим к получению основного результата.

По аналогии с идеями методов работ [1, 2], в ИДУ (1) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_4(t,\tau)$ с $x^{(4)}(\tau)$ по правилу "веса" [5, с.114]:

$$\sum_{j=0}^{3} Q_j(t,\tau) x^{(j)}(\tau) = \sum_{j=0}^{3} Q_j(t,\tau) x^{(j)}(\tau) + H_4(t,\tau) x^{(4)}(\tau) - H_4(t,\tau) x^{(4)}(\tau). \qquad (2)$$

Далее проведем интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t} H_4(t,\tau) x^{(4)}(\tau) d\tau = -H_4(t,t) x'''(t) + H_4(t,t_0) x'''(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_{4\tau}(t,\tau) x'''(\tau) d\tau. \qquad (3)$$

В силу соотношений (2), (3) ИДУ (1) сводится к следующему нагруженному ИДУ:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+\left[a_3(t)-H_4(t,t)\right]x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+\left[Q_3(t,\tau)+H'_{4\tau}(t,\tau)\right]x'''(\tau)+H_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)\}d\tau=$$
$$=f(t)-H_4(t,t_0)x'''(t_0)+F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau),\quad t\geq t_0. \qquad (4)$$

Теперь в ИДУ (4) сделаем нестандартные замены [3]:

$$x''(t)+\lambda^2x(t)=W_1(t)y(t), \qquad (5)$$
$$y''(t)+\mu^2y(t)=W_2(t)z(t), \qquad (6)$$

где λ,μ-некоторые вспомогательные параметры, причем $\lambda\neq 0,\mu\neq 0$;

$0<W_k(t)$-некоторые весовые функции $(k=1,2)$; $y(t)$-новая неизвестная функция. Вследствие чего из ИДУ (4) получается следующая эквивалентная система:

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda^2x(t)=W_1(t)y(t), \\ y''(t)+\mu^2y(t)=W_2(t)z(t), \\ z'(t)+b_4(t)z(t)+b_3(t)y'(t)+b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int_{t_0}^{t}\left[T_0(t,\tau)x(\tau)+T_1(t,\tau)x'(\tau)+T_2(t,\tau)y(\tau)+T_3(t,\tau)y'(\tau)+K(t,\tau)z(\tau)\right]d\tau= \\ =(W_1(t)W_2(t))^{-1}\left[f(t)-H_4(t,t_0)x'''(t_0)+F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau)\right],\quad t\geq t_0, \end{cases} \qquad (7)$$

где $b_4(t)\equiv a_4(t)+2W_1'(t)(W_1(t))^{-1}+(W_1(t)W_2(t))'(W_1(t)W_2(t))^{-1}$,

$$b_3(t)\equiv\left[a_3(t)-H_4(t,t)\right](W_2(t))^{-1}+\left[2a_4(t)W_1'(t)+3W_1''(t)\right](W_1(t)W_2(t))^{-1}-(\lambda^2+\mu^2)(W_2(t))^{-1};$$
$$b_2(t)\equiv a_2(t)(W_2(t))^{-1}+\{[a_3(t)-H_4(t,t)]W_1'(t)+a_4(t)[W_1''(t)-(\lambda^2+\mu^2)W_1(t)]+[W_1''(t)-$$
$$-(\lambda^2+\mu^2)W_1(t)]'-2\mu^2W_1'(t)\}(W_1(t)W_2(t))^{-1};$$
$$b_1(t)\equiv\{a_1(t)-\lambda^2\left[a_3(t)-H_4(t,t)\right]+\lambda^4\}(W_1(t)W_2(t))^{-1};$$
$$b_0(t)\equiv[a_0(t)-\lambda^2a_2(t)+\lambda^4a_4(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1};$$
$$T_0(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-\lambda^2Q_2(t,\tau)+\lambda^4H_4(t,\tau)];$$
$$T_1(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}\{Q_1(t,\tau)-\lambda^2[Q_3(t,\tau)+H'_{4\tau}(t,\tau)]\};$$
$$T_2(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}\{Q_2(t,\tau)W_1(\tau)+[Q_3(t,\tau)+$$
$$+H'_{4\tau}(t,\tau)]W_1'(\tau)+H_4(t,\tau)[W_1''(\tau)-(\lambda^2+\mu^2)W_1(\tau)]\};$$
$$T_3(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}\{[Q_3(t,\tau)+H'_{4\tau}(t,\tau)]W_1(\tau)+2H_4(t,\tau)W_1'(\tau)\};$$
$$K(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t))^{-1}H_4(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau).$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Предположим, что [5,3]:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$(W_1(t)W_2(t))^{-1}f(t)=\sum_{i=0}^{n}f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t) \quad (i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}, \qquad E_i(t)\equiv f_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1} \quad (i=1..n),$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t) \quad (i=1..n), \qquad (R)$$

$c_i(t) \quad (i=1..n)$ - некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t),z(t))$ системы (7), следуя [4, с. 194-217], ее первое уравнение умножаем на $x'(t)$, второе - на $y'(t)$, третье - на $z(t)$, сложим полученные соотношения, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом по аналогии с работами [5, 3], вводим условия *(K), (f),* функции $\psi_i(t),\ R_i(t,\tau),\ E_i(t) \quad (i=1..n),$ условие *(R)*, функции $c_i(t) \quad (i=1..n),$ применяем леммы 1.4, 1.5 [7]. В итоге имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
V(t)&\equiv(x'(t))^2+\lambda^2(x(t))^2+(y'(t))^2+\mu^2(y(t))^2+(z(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_4(s)(z(s))^2ds+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2+B_i(t)(Z_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Z_i(t,t_0)+c_i(t)-\\
&-\int_{t_0}^{t}\left[B_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Z_i(s,t_0)+c_i'(s)\right]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Z_i(t,\tau))^2d\tau\}\equiv\\
&\equiv V(t_0)+2\int_{t_0}^{t}\{W_1(s)y(s)x'(s)+W_2(s)\,z(s)y'(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2+\\
&+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Z_i(s,\tau))^2d\tau]\}ds+2\int_{t_0}^{t}z(s)\{f_0(s)-(W_1(s)W_2(s))^{-1}H_4(s,t_0)x'''(t_0)+\\
&+(W_1(s)W_2(s))^{-1}F(s,x(s),x'(s),\int_{t_0}^{s}h(s,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau)-b_3(s)y'(s)-b_2(s)y(s)-\\
&-b_1(s)x'(s)-b_0(s)x(s)-\int_{t_0}^{s}[T_0(s,\tau)x(\tau)+T_1(s,\tau)x'(\tau)+T_2(s,\tau)y(\tau)+\\
&+T_3(s,\tau)y'(\tau)+K_0(s,\tau)z(\tau)]d\tau\}ds, \qquad (8)
\end{aligned}$$

где $Z_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)z(\eta)d\eta \quad (i=1..n),$

$$V(t_0)=(x'(t_0))^2+\lambda^2(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+\mu^2(y(t_0))^2+(z(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

Теорема. Пусть 1) выполняются условия *(CH),* $\lambda\neq 0,\ \mu\neq 0,$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$W_k(t)>0\ (k=1,2),$ *(K), (f), (R);* 2) $b_4(t)\geq 0;$ 3) $A_i(t)\geq 0,\ B_i(t)\geq 0,$

$B_i'(t)\leq 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(I,R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\ (E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),$

$R_{it\tau}''(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)\quad (i=1..n;\ k=0,1);$

4) $W_1(t)+W_2(t)+|f_0(t)|+(W_1(t)W_2(t))^{-1}\{|H_4(t,t_0)|+F_0(t)+g_0(t)+g_1(t)+$

$+g_2(t)\int\limits_{t_0}^{t}[g_3(t,\tau)+g_4(t,\tau)]d\tau\}+|b_k(t)|+\int\limits_{t_0}^{t}\big[|T_k(t,\tau)|+|K_0(t,\tau)|\big]d\tau\in L^1(I,R_+\setminus\{0\})$

$(k=0,1,2,3).$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t),z(t))$ системы (7) верны утверждения:

$$x^{(\nu)}(t)=O(1)\quad (\nu=0,1), \tag{9}$$

$$y^{(\nu)}(t)=O(1)\quad (\nu=0,1), \tag{10}$$

$$z(t)=O(1),\ b_4(t)(z(t))^2\in L^1(I,R_+),\quad A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2=O(1)\quad (i=1..n). \tag{11}$$

Пусть, кроме того, 5) $W_1(t),\ W''(t),\ W_2(t)=O(1).$ Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1): $x^{(\nu)}(t)=O(1)\quad (\nu=0,1,2,3,4),$ т.е. любое решение ИДУ (1) устойчиво.

Схема доказательства теоремы такова. В силу условия 1)-3) вытекает, что $V(t)\geq 0$. Учитывая условия *(CH),* 3), переходим от тождества (8) к интегральному неравенству:

$$V(t)\leq V(t_0)+2\int\limits_{t_0}^{t}\{|\mu|W_1(s)+W_2(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s)+R_i^*(s)]\}V(s)ds+2\int\limits_{t_0}^{t}(V(s))^{\frac{1}{2}}\{|f_0(s)|+$$

$$+(W_1(s)W_2(s))^{-1}|H_4(s,t_0)x'''(t_0)|+(W_1(s)W_2(s))^{-1}[F_0(s)+g_0(s)|x(s)|+g_1(s)|x'(s)|+$$

$$+g_2(s)\int\limits_{t_0}^{s}(g_3(s,\tau)|x(\tau)|+g_4(s,\tau)|x'(\tau)|)d\tau]+[|b_3(s)|+|\mu||b_2(s)|+|b_1(s)|+|\lambda||b_0(s)|](V(s))^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{s}[|\lambda||T_0(s,\tau)|+|T_1(s,\tau)|+|\mu||T_2(s,\tau)|+|T_3(s,\tau)|+|K_0(s,\tau)|](V(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau\}ds\leq$$

$$\leq V(t_0)+2\int\limits_{t_0}^{t}\{|\mu|W_1(s)+W_2(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s)+R_i^*(s)]\}V(s)ds+$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t}(V(s)^{\frac{1}{2}}\{|f_0(s)|+(W_1(s)W_2(s))^{-1}|H_4(s,t_0)||x'''(t_0)|+(W_1(s)W_2(s))^{-1}[F_0(s)+$$

$$+|\lambda|g_0(s)(V(s))^{\frac{1}{2}}+g_1(s)(V(s))^{\frac{1}{2}}+g_2(s)\int\limits_{t_0}^{s}(|\lambda|g_3(s,\tau)+g_4(s,\tau))(V(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau]+$$

$$+[|b_3(s)|+|\mu||b_2(s)|+|b_1(s)|+|\lambda||b_0(s)|](V(s)^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{t_0}^{s}[|\lambda||T_0(s,\tau)|+|T_1(s,\tau)|+$$

$$+|\mu||T_2(s,\tau)|+|T_3(s,\tau)|+|K_0(s,\tau)|](V(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau\}ds. \tag{12}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

К интегральному неравенству (12) применим лемму 1 [6] и на основании условий 3), 4) получаем, что $V(t)=O(1)$. Так как

$$(x'(t))^2+\lambda^2(x(t))^2+(y'(t))^2+\mu^2(y(t))^2+(z(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_4(s)(z(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2\le V(t),$$

то отсюда вытекают утверждения (9)-(11) теоремы. Далее из соотношений:

$$x''(t)=-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t), \qquad x'''(t)=-\lambda^2x'(t)+W_1(t)y'(t)+W_1'(t)y(t),$$

$$x^{(4)}(t)=\lambda^4x(t)+[W_1''(t)-(\lambda^2+\mu^2)W_1(t)]y(t)+2W_1'(t)y'(t)+W_1(t)W_2(t)z(t)$$

с учетом утверждений (9), (10), $z(t)=O(1)$ и условия 5) теоремы следует, что $x''(t)=O(1)$, $x'''(t)=O(1)$, $x^{(4)}(t)=O(1)$. Следовательно, для любого решения $x(t)$ ИДУ (1): $x^{(\nu)}(t)=O(1)$ $(\nu=0,1,2,3,4)$, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в условии 5) теоремы отсутствует условие $W_1'(t)=O(1)$, хотя оно используется для доказательства $x'''(t)=O(1)$. Заметим, что из условий $W_1(t)=O(1)$, $W_1''(t)=O(1)$ вытекает $W_1'(t)=O(1)$, на основании соотношения [8,с. 236-237].

Пример. Для ИДУ (1) с $a_4(t)\equiv 7+e^{\sqrt[3]{t\sin t}}$, $a_3(t)\equiv 21+4e^{\sqrt[3]{t\sin t}}+H_4(t,t)-\dfrac{97e^{-t}}{t^2+2}$,

$$a_2(t)\equiv 31+9e^{\sqrt[3]{t\sin t}}-\frac{194}{t^2+2}-\left(\frac{\sin 9t}{t}\right)^2e^{-t},\ a_1(t)\equiv 20+4e^{\sqrt[3]{t\sin t}}-\frac{97e^{-t}}{t^2+2}+\frac{101e^{-3t}\sin 5t}{(t+4)^2},$$

$$a_0(t)\equiv 24+8e^{\sqrt[3]{t\sin t}}-\frac{194}{t^2+2}-\left(\frac{\sin 9t}{t}\right)^2e^{-t}-159e^{-3t}\sin e^{-t},$$

$$Q_0(t,\tau)\equiv 8H_4(t,\tau)-\frac{192}{(t+3\tau+5)^6}-\frac{203e^{-3t}}{t^2+2\tau+9}-\frac{144e^{-4t}}{t+\tau+3},\quad Q_1(t,\tau)\equiv 4H_4(t,\tau),$$

$$Q_2(t,\tau)\equiv 9H_4(t,\tau)-\frac{192}{(t+3\tau+5)^6}-\frac{203e^{-3t}}{t^2+2\tau+9},\quad Q_3(t,\tau)\equiv -H'_{4\tau}(t,\tau)+4H_4(t,\tau)-\frac{96e^{-3t}}{(t+3\tau+5)^6},$$

$$f(t)\equiv-\frac{e^{-3t+t^3}\sin^5 2t}{t+23}-\frac{307e^{-3t}\cos t}{(t+5)^2},$$

$$F(t,x,u,\vartheta)\equiv-\frac{|x|\cos\vartheta}{|x|+1}e^{-3t}\sin(2e^{-t})+\frac{e^{-3t}x\sin x}{t^2+3}-\frac{e^{-3t}u^3}{(t+4)^2(u^2+1)}-\frac{e^{-3t}\vartheta|\vartheta|}{|\vartheta|+2},$$

$h(t,\tau,x,u)\equiv\dfrac{|x|\cos x}{e^t+\tau+20}-\dfrac{|u|}{(t+2\tau+9)^5(|u|+3)}$, $t_0=0$ выполняются все условия теоремы при

$$H_4(t,\tau)\equiv e^{-3t+3\tau}\left\{\left[\exp\left(\frac{\cos 7t}{(t+1)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t-\tau+21}\right\}e^{t^3+\tau^3}\sin^5 2t\sin^5 2\tau-\frac{31e^{-3t+3\tau}\cos(t\tau)}{(4t+3\tau+17)^4},$$

$\lambda=1$, $\mu=2$, $W_1(t)\equiv e^{-2t}$, $W_2(t)\equiv e^{-t}$, здесь

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$b_4(t) \equiv e^{\sqrt[3]{t\sin t}},\ b_3(t) \equiv -\frac{97}{t^2+2},\ b_2(t) \equiv -\left(\frac{\sin 9t}{t}\right)^2,\ b_1(t) = \frac{101\sin 5t}{(t+4)^2},\ b_0(t) \equiv -159\sin e^{-t},$$

$$T_0(t,\tau) \equiv -\frac{144e^{-t}}{t+\tau+3},\ T_1(t,\tau) \equiv \frac{96}{\left(t+3\tau+5\right)^6},\ T_2(t,\tau) \equiv -\frac{203e^{-2\tau}}{t^2+2\tau+9},\ T_3(t,\tau) \equiv -\frac{96}{\left(t+3\tau+5\right)^6},$$

$$K(t,\tau) \equiv \left\{\left[\exp\left(\frac{\cos 7t}{(t+1)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t-\tau+21}\right\} e^{t^3+\tau^3}\sin^5 2t\sin^5 2\tau - \frac{31\cos(t\tau)}{(4t+3\tau+17)^4},$$

$$n=1,\ \psi_1(t) \equiv e^{t^3}\sin^5 2t,\quad R_1(t,\tau) \equiv \left[\exp\left(\frac{\cos 7t}{(t+1)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t-\tau+21},$$

$$A_1(t) \equiv \exp\left(\frac{\cos 7t}{3(t+1)^2}\right),\quad A_1^*(t) \equiv \frac{7t+9}{(t+1)^3},\ B_1(t) \equiv \frac{1}{t+21},\ R_1^*(t) \equiv \frac{7t+9}{(t+1)^3},$$

$$E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+23},\ c_1(t) \equiv \frac{1}{t+21},\ K_0(t,\tau) \equiv -\frac{31\cos(t\tau)}{(4t+3\tau+17)^4},\ \ f_0(t) \equiv -\frac{307\cos t}{(t+5)^2},$$

$$F_0(t) \equiv 2e^{-4t},\ g_0(t) \equiv \frac{e^{-3t}}{t^2+3},\ g_1(t) \equiv \frac{e^{-3t}}{\left(t+4\right)^2},\ \ g_2(t) \equiv e^{-3t},\ g_3(t,\tau) \equiv \frac{1}{e^t+\tau+20},$$

$g_4(t,\tau) \equiv \dfrac{1}{\left(t+2\tau+9\right)^5}$. Следовательно, любое решение этого ИДУ устойчиво.

Таким образом, найден класс ИДУ вида (1), для которого сформулированная нами задача решаема.

Литература:

1. Искандаров С., Абдирайимова Н. А. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с неполными ядрами // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. - Новосибирск, 2020. - №2. - 1(41). - С. 179-184.
2. Искандаров С., Абдирайимова Н. А. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с неполными ядрами. // Вестник КРСУ - 2020. - Т.20, №12. - С. 23-29.
3. Искандаров С. Об устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2007. - Вып. 36. - С. 56-62.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр./ Под ред. Ю.М.Свирежева.-М.: Наука, 1976.-288 с.
5. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. - Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
6. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. - Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С. 68 – 103.
7. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Бишкек, 2003. – 34 с.
8. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. - М.: Мир, 1965. – 276 с.