DOI:10.26104/NNTIK.2022.23.89.015

Сапарова Г.Б., Омурзаков Б.К.

ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ФРЕДГОЛЬМ ТЕҢДЕМЕСИ ЭКОНОМИКА МАСЕЛЕЛЕРИНДЕ

Сапарова Г.Б., Омурзаков Б.К.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

G. Saparova, B. Omurzakov

FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE II TYPE IN PROBLEMS OF ECONOMICS

УДК: 517

Татаал экономикалык процесстерди дайыма эле кадимки дифференциалдык теңдеме менен берүү мүмкүн эмес. Эгерде булар вектордук динамикалык көрсөткүчтүн топтолушу (интегралдоо) болгон процесстер болсо, анын өзгөчө аргументтери боюнча оң да, терс да, анда мындай процесстерди моделдөө математикалык аппарат дифференциалдык эсептөөдөн интегралдык эсептөөгө которулат, б.а. интегралдык теңдемелерге айланат. Мисалы, эмгек акы боюнча карыздарды көбөйтүү. Социалдык-экономикалык туруксуздук учурунда, мисалы, улуттук валютанын курсунун секирүүсүндө же пандемияда Фредгольм интегралдык теңдемесинин өзөгү системанын (башкаруу) ички мүмкүнчүлүктөрүнүн, анын финансылык потенциалын, ошондой эле инвестициянын (убактылуу) жайылышы жана демографиялык «стресс» катары. Бул макалада биз экинчи түрдөгү Фредгольм интегралдык теңдемени карап чыгабыз.

***Негизги сөздөр**: интегралдык теңдеме, бузулуу, ядро, өздүк функция, өздүк маани, чечим, теңдеме.*

Сложные экономические процессы не всегда могут быть заданы обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если это процессы, в которых происходит накопление (интегрирование) векторного динамического показателя, причем как положительный, так и отрицательный по частным его аргументам, то математический аппарат при моделировании таких процессов переносится с дифференциального исчисления на интегральные исчисления, то есть переходит в интегральные уравнения. Например, наращивание долгов по заработной плате. Во время социально-экономической нестабильности, например, скачкообразного курса национальной валюты либо пандемии, ядро интегрального уравнения Фредгольма призвано отражать внутренние возможности системы (управления), ее финансовый потенциал, а также и (временную) реакцию на эндогенное (то есть внутреннее) распространение инвестиционно-демографического «стресса». В данной статье рассматривается интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.

***Ключевые слова:** интегральное уравнение, вырожденное, ядро, собственные значения, собственные функции, уравнения, решения.*

Complex economic processes cannot always be given by ordinary differential equations. In these are processes in which the accumulation (integration) of a vector dynamic indicator occurs, both positive and negative in term of its private arguments, then the mathematical apparatus when modeling such processes is transferred from differential calculus to integral calculus, that is, it goes into integral equations. For example, escalating wade arrears. During socio-economic instability, for example, a jump in the exchange rate of the national currency or a pandemic, the core of the Fredholm integral equation is designed to reflect the integral capabilities of the system (management), its financial potential, as well as the (temporary) spread of investment and demographic «stress». In this article, we consider an integral Fredholm equation of II type with a degenerate core.

***Key words:** integral equation, degenerate, core, eigenvalue, own function, equation, solution.*

Введение. В настоящее время развитие экономики вступила в такую фазу, где финансово-стратегические решения принимаются при недостаточно, а порой и неточной информации, при этом данные информации то конечны, то без конечны. Инвестиции вложения в разные сферы экономики описываются квази-непрерывными распределениями денег [3]. С точки зрения математики, такие явления означают: переход от функциональных рядов и конечных сумм к решению интегральных уравнений с параметром, которое является или управляемой, или случайной величиной.

В данной статье рассмотрено интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром [1].

Постановка задачи. Рассмотрим процесс, описанное интегральным уравнением Фредгольма второго рода [3], вида:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 e^{-(x+s)} y(s)\, ds + x,$$

где ядро $K(x,s) = Ae^{-(x+s)}$ трансформирует взброс, которое начинается с величины A (при $x=s=0$), которое ограничена, а затем убывающей без изменения [3]. Правая часть $f(x) = x$, функция которое является линейной. Ядро имеет вид:

$$K(x,s) = e^{-(x+s)} = e^{-x} \cdot e^{s},$$

где оно является симметрическим и вырожденным, тогда отсюда следует, λ – действительные числа, где им соответствующие независимые линейные собственные функции $\{\varphi_i(x)\}$ ортогональны [3]:

$$\int_0^1 \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)\, dx = 0.$$

Методы решения:

Имеем

$$y(x) = x + \lambda e^{-x} \int_0^1 e^{-s}\, y(s) ds; \tag{1}$$

где,

$$C = \int_0^1 e^{-s}\, y(s) ds = \int_0^1 e^{-t}\, y(t) dt = const \tag{2}$$

– неизвестное, которое зависит от роста неточного решения. Тогда подставляя (2) в (1), имеем:

$$y(x) = x + \lambda e^{-x} C \text{ или } y(t) = t + \lambda e^{-t} C \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем:

$$C = \int_0^1 e^{-t}\, (t + \lambda e^{-t} C) dt \tag{4}$$

Преобразуем формулу (4):

$$C = \int_0^1 e^{-t}\, t dt + \lambda C \int_0^1 e^{-2t}\, dt = C - \lambda C \int_0^1 e^{-2t}\, dt = \int_0^1 t e^{-t}\, dt \Rightarrow C\left(1 - \lambda \int_0^1 e^{-2t}\, dt\right) = \int_0^1 t e^{-t}\, dt \Rightarrow$$

Решим отдельно интеграл, стоящий в правой части вышестоящего интеграла:

$$\int_0^1 t e^{-t}\, dt \Rightarrow \left| \begin{matrix} u = t; du = dt \\ dv = e^{-t} dt; v = -e^{-t} \end{matrix} \right| = t \cdot (-e^{-t})|_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\, dt = -e^{-t} - e^{-t}|_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - e^{0}) =$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}; \tag{5}$$

Подставляя (5) в верхний интеграл:

$$\Rightarrow C\left(1 - \lambda \int_0^1 e^{-2t}\, dt\right) = \frac{e-2}{e},$$

тогда рассмотрим два случая:

1-й случай: Пусть $\lambda = \lambda_0$, тогда $1 - \lambda \int_0^1 e^{-2t}\, dt = 0$.

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{\int_0^1 e^{-2t}\, dt} = \frac{1}{-\frac{1}{2} e^{-2t}|_0^1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}(e^{-2} - e^{0})} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^2})} = \frac{2e^2}{e^2 - 1} \approx 2{,}31.$$

Тогда, $C \in \emptyset$, так как $\int_0^1 t \cdot e^{-t}\, dt \neq 0$, и уравнение (1) не может иметь решений в этом случае, а $\lambda = \lambda_0$ является собственным значением однородного уравнения Фредгольма второго рода [3].

2-й случай: Пусть $\lambda \neq \lambda_0$, то есть $\lambda \in (-\infty: \lambda_0) \cup (\lambda_0; +\infty)$. В этом случае решение для C существует и единственно:

$$C\left(1 - \lambda \int_0^1 e^{-2t}\, dt\right) = \frac{e-2}{e} \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{\frac{e-2}{e}}{1 - \lambda \int_0^1 e^{-2t}\, dt} = \frac{2e(e-2)}{e^2(2-\lambda) + \lambda};$$

Причем $\lambda = \frac{2e^2}{e^2-1} = \lambda_0$. Тогда функция

$$y(x) = x + \lambda e^{-x} \cdot \frac{2e(e-2)}{e^2(2-\lambda)+\lambda} -$$

является точным решением уравнения Фредгольма при всех $\lambda \neq \frac{2e^2}{e^2-1}$.[1]

Если $\lambda = \frac{2e^2}{e^2-1} = \lambda_0$, то уравнение не имеет решений.

Однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 e^{-(x+s)} y(s)\, ds,$$

может иметь при $\lambda = \frac{2e^2}{e^2-1} = \lambda_0$ – бесконечно решений. Если добавим функцию $y(x) = 0$, то получаем одномерное инвариантное подпространство решений вида:

$$y(x) \equiv \check{y}(x) = \lambda_0 C e^{-x} = \frac{2e^2}{e^2-1} \cdot C \cdot e^{-x} = C \cdot \frac{2e^{2-x}}{e^2-1};\ C \neq 0,$$

а при C = 0 имеем решение $y(x) = 0$, которое не является собственной функцией. Собственные функции которые были найдены выше – линейно зависимы: поэтому можно выбрать только одну из них, а остальные можно получить путем умножения на $C \neq 0$.[3]

Отсюда сделаем следующий вывод: методом нахождения собственных значений и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма можно определить многовариантные экономические процессы.

Литература:

1. Сапарова Г.Б. Единственность решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с разрывным ядром. / Известия Ошского технологического университета. - №2. - Ош, 2012. - С. 213-216.
2. Сапарова Г.Б., Шайлообаева Ш. Математическое моделирование экономических процессов. / Известия ОшТУ №1. - 2018. Ч.2. - С. 154-157.
3. Паршикова Г., Перфильев А., Силаев А. Линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода в приложениях к экономике. // Инновации и инвестиции. - 2020. - № 9.
4. Краснов М.А. Интегральные уравнения. Учебное пособие. / М.А. Краснов, Л.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - М.: Книжный дом «Либроком», 2012. - 192 с.
5. Интегральные уравнения. Часть 1: справочник для вузов. / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – 2-е изд., испр. и доп. - М.: Юрайт, 2017. - 365 с.
6. Сапарова Г.Б., Султан кызы Н. Математические модели оценки финансовых рисков. / Известия ОшТУ, 2021.
7. Паршикова Г., Силаев А. Интегро-дифференциальные модели экономической динамики. // Инновации и инвестиции. 2021. - №1. С. 140-144.
8. Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А. Особенности решений интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма с малым параметром при старшей производной, когда правые части негладкие функции. / Известия вузов Кыргызстана. - 2017. - №.7. - С. 11-19.